Medida e integración

Tercero de Matemáticas

Relación 1

1. Si $X = \{a, b, c, d\}$, ¿cuál es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A} = \big\{\{a\}, \{b\}\big\}$?

2. Dada una aplicación $F : X \to X'$, demostrar que:

   (a) Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces $\mathcal{A}' = \{B \subset X' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en X'.

   (b) Si $\mathcal{A}'$ es una σ-álgebra en X', entonces $\mathcal{A} = F^{-1}(\mathcal{A}') = \{F^{-1}(B) \subset X : B \in \mathcal{A}'\}$ es una σ-álgebra en X.

   (c) Si $\mathcal{C} \subset P(X')$, entonces $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$ (donde $\sigma(\mathcal{C})$ representa la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$).

3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en X. Probar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si y sólo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$ para toda sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$

4. Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ es una colección arbitraria de σ-álgebras, probar que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra.

5. Dado un conjunto X, sea $A \subset X$ y $H_A = \{B \subset X : B \subset A \text{ ó } B^c \subset A\}$.

   (a) Probar que H_A es una σ-álgebra en X.

   (b) Si $X = \mathbb{R}$ y $A_n = [-n, n]$, probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_{A_n}$ no es una σ-álgebra.

6. Consideremos las siguientes extensiones de una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\};\\
\mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\};\\
\mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

   Demostrar que $\mathcal{C}_3$ es el álgebra generada por $\mathcal{C}$.

7. Sea X un conjunto no numerable.

   (a) Si definimos $\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\}$, demostrar que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra.

   (b) Determinar la σ-álgebra generada por la colección de los subconjuntos finitos de X.

Relación 2

1. Si $\lambda > 0$ y $E \subset \mathbb{R}$, definimos $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$.

   (a) Probar que $m^*(\lambda E) = \lambda m^*(E)$.

   (b) Si E es medible, probar que λE es medible y $m(\lambda E) = \lambda m(E)$.

2. Sean E, F conjuntos medibles. Probar que $m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F)$.

3. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles. Si definimos $\liminf E_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>k} E_n$ y $\limsup E_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>k} E_n$, y suponemos que $m(\bigcup E_n) < \infty$, probar que:

   (a) $m(\liminf E_n) \leq \liminf m(E_n)$.

   (b) $m(\limsup E_n) \geq \limsup m(E_n)$.

4. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, con B medible.

   (a) Probar que existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $A \subset G$ y $m(G) = m^*(A)$.

   (b) Si $m^*(A) < \infty$, $B \subset A$ y $m(B) = m^*(A)$, probar que A es medible.

   (c) Si $m(B) < \infty$ y $A \subset B$, probar que A es medible si y sólo si $m(B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible. Probar que $1/f$ es medible.

6. Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

   $$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\},\ \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\},\ \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\}$$

   son medibles.

7. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es continua en casi todo punto, probar que f es medible.

8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto, demostrar que f' es medible.

9. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   (a) Si f es medible, f^+ y f^- son medibles.

   (b) Si f y $|f|$ son medibles, f^+ y f^- son medibles.

   (c) Si f no es medible, ni f^+ ni f^- son medibles.

   (d) Si $|f|$ es medible, f es medible.

Relación 3

1. Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe A medible, con $m(A) < \infty$, tal que $\displaystyle\int f < \int_A f + \varepsilon$.

2. Sea f una función integrable y tal que $\int_E f = 0$ para todo conjunto medible E. Probar que $f = 0$ en casi todo punto.

3. Sean f, g dos funciones integrables. Probar que la función $\text{mín}(f, g)$ es integrable, y que
$$\int \text{mín}(f, g) \leq \text{mín}\left(\int f, \int g\right).$$
Estudiar el caso donde se cumple la igualdad.

4. Sean $f, f_n \geq 0$ integrables y tales que $f_n \to f$ c.s. Probar que
$$\int f_n \to \int f \iff \int |f_n - f| \to 0.$$

5. Probar que la siguiente proposición es falsa:

   Si $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_a^1 f$ existe y es finito, entonces f es integrable Lebesgue en $(0, 1]$.

6. Dadas las funciones $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1}\, dt$, probar:

   (a) $f(x) + g(x) = \pi/4$.

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.

7. Demostrar:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n \cdot n!}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   (b) Si $a \geq 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{-a^2/4}$.

   (c) Si $p > 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(x-1)^{-1} \ln x\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(p+n)^2}$.

8. Demostrar que la función $\Gamma(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{y-1}\, dx$ es de clase $C^{(\infty)}$ en $(0, \infty)$ y verifica

   i) $\Gamma(y + 1) = y \cdot \Gamma(y)$, $y > 0$.

   ii) $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \geq 0$.

   iii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Relación 4

1. Sean f, f_n integrables y tales que $f_n \to f$ c.s. Probar que
$$\int |f_n - f| \to 0 \Longleftrightarrow \int |f_n| \to \int |f|.$$

2. Probar que $\ln z = \lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[n]{z} - 1\big)$, $\forall z > 0$.

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \cdot \chi_{[0,1]}(x)\, dx$ y $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \chi_{[0,1]}(x)\, dx$.

4. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

5. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\, dx$, con $a < -1$.

6. Demostrar que

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt = \int_1^\infty e^{-t} \ln t\, dt.$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt = \int_0^1 e^{-t} \ln t\, dt.$

7. Demostrar que, si $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\, dx$, entonces $A = 0$ si $a > 0$ y $A > 1/4$ si $a = 0$.

8. Sea $f \geq 0$ una función medible, con $0 < \displaystyle\int f < \infty$, y sea $\alpha > 0$ una constante.

   Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int n \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \int f & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$

9. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

10. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n \cdot e^x\, dx.$

11. Calcular

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty (1+(x/n))^{-n}\cdot \operatorname{sen}(x/n)\,dx.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\cdot \operatorname{sen}(x/n)\cdot (x(1+x^2))^{-1}\,dx.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1}\,dx$ según los valores de a.

12. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,dx.$

13. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}\,dx.$

14. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\operatorname{sen} x}{1+(nx)^p}\,dx$, con $1<p<2$.

15. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\ln(n+x)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\,dx.$

Relación 5

1. Sea $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], y \in [0,1], \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

   Probar que f es medible Lebesgue y calcular $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} f$.

2. Probar que $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}(1+x^2+y^2)}$ es integrable en $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

3. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Probar que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dydx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy = -\frac{\pi}{4}.$$

4. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1], \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Probar que

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,dydx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,dxdy,$$

   pero f no es integrable en $[-1,1] \times [-1,1]$.

5. Dada la función $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} & \text{si } 0 < y < \left|x - \frac{1}{2}\right| \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

   calcular $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$ y $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$. Deducir de lo anterior si f es o no integrable en $[0,1] \times [0,1]$ justificando la respuesta.

6. Comprobar que la función $f(x,y) = e^{-y} \operatorname{sen}(2xy)$ es integrable en $R = [0,1] \times [0,\infty]$. Deducir de lo anterior que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy = \frac{1}{4} \ln 5$.

7. Se considera la función $F : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \cdot y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

   Probar que f es medible Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y calcular la integral de f en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

8. Dado un conjunto medible $E \subset [0,1] \times [0,1]$, probar que, si $m_1(E^x) \leq 1/2$ para casi todo $x \in [0,1]$, entonces $m_1(\{y \in [0,1] : m_1(E_y) = 1\}) \leq 1/2$.

Relación 6

1. *Si* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *probar que* $\ell^p \subset \ell^q$.

2. *Supongamos que* $\mu(X) = 1$ *y sean* f *y* g *funciones medibles no negativas, con* $f \cdot g \geq 1$. *Probar que* $\left(\int_X f \, d\mu\right) \cdot \left(\int_X g \, d\mu\right) \geq 1$.

3. *Demostrar que, si* $\mu(X) < \infty$ *y* $0 < r < s < \infty$, *entonces* $L^s(X) \subset L^r(X)$ *y que para* $f \in L^s(X)$, $\|f\|_r \leq \|f\|_s \cdot \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}$.

4. *Demostrar que, si* $0 < r < p < s < \infty$, *entonces* $L^r \cap L^s \subset L^p \subset L^r + L^s$.

5. *Si* $X = [0,1]$ *y* $f \in L^5(X)$, *probar que* $\displaystyle\int_X \frac{f(x)}{x^{2/3}} \, dx \leq 6^{4/5} \|f\|_5$.

6. *Si* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x(1-x)}}$, *probar que* $f \in L^p(0,1)$, $1 \leq p < 6$, *pero* $f \notin L^6(0,1)$.

7. *Si* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, *comprobar si* $f \in L^3(\mathbb{R})$ *y* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

8. *Si* $f \in L^p(0,1)$, *con* $2 < p$, *probar que* $f/\sqrt{x} \in L^1(0,1)$.

9. *Si* $f \in L^5(\mathbb{R})$ *y* $g \in L^{5/4}(\mathbb{R})$, *probar que* $fg \in L^1(\mathbb{R})$.

10. *Si* $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *probar que* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

11. *Si* $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, $g \in L^\infty$, *probar que* $fg \in L^p$.

12. *Supongamos que* $0 < r < s < \infty$ *y* $f \in L^r \cap L^s$. *Probar:*

    a) *La función* $\phi(p) = \ln \int |f|^p$ *es convexa en* $[r,s]$.

    b) $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

13. *Demostrar que, si* $f, g \in L^p$, *con* $0 < p < 1$, *entonces* $\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$.