Relación 1

1. En la integral de Riemann, se dice que un conjunto $A \subset [0,1]$ tiene contenido o longitud si la función $\aleph_A$ es integrable de Riemann en $[0,1]$, o equivalentemente, si la frontera de A, ∂A, tiene medida nula. En tal caso, podemos definir la longitud o contenido de A como $\int_a^b \aleph_A dx$.
(a) ¿ Cual es la diferencia entre los conceptos de contenido nulo y medida nula?.
(b) Probar que $E = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{0\}$ tiene contenido nulo.
(c) Mostrar que la integral de Riemann puede medir la longitud del conjunto $A = [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{8}, \frac{1}{7}] \cdots\cdots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]$.
(d) Mostrar que para todo $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \aleph_{[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]} \leq \aleph_A \leq \aleph_{[0, \frac{1}{2n+1}]} + \sum_{k=1}^{n} \aleph_{[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]} \quad ,$$

y concluir que la longitud de A es igual a $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$.
(e) Mostrar que $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ no tiene contenido pero tiene medida nula.

2. (a) Calcular el área de un triángulo de base 2ε y altura $1/\varepsilon$.
(b) Construir una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ en $[0,1]$ cuyo límite puntual sea una función continua f y tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx \quad .$$

(b) Mostrar que toda función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anula en $[0,1]$ excepto por un conjunto finito de puntos, es integrable de Riemann en $[0,1]$ y tiene integral nula.

3. Se considera en el intervalo $[0,1]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q}\ ,\ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \quad \text{es irracional} \end{cases} \quad .$$

(a) Mostrar que f es discontinua en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
(b) Si $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\frac{p}{q} - x| < \delta$, (p,q)=1 y $p \leq q$, entonces $q \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
(c) Concluir que f es integrable de Riemann en $[0,1]$.
(d) Si

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q}\ ,\ (p,q) = 1\ ,\ q \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad ,$$

mostrar que f_n converge uniformemente a f en $[0,1]$ y concluir que $\int_0^1 f dx = 0$.

4. Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona creciente y acotada, probar las siguientes afirmaciones:
(a) f tiene límites laterales en todos los puntos del intervalo $[0,1]$.
(b) Si $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_n \leq 1$, entonces

$$\sum_{j=2}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) \leq f(1) - f(0) \quad .$$

(c) $D_\varepsilon = \{x \in (0,1) : f(x^+) - f(x^-) > \varepsilon\}$ es un conjunto finito para todo $\varepsilon > 0$.
(d) El conjunto de puntos de discontinuidad de f en $[0,1]$ tiene medida nula y f es integrable de Riemann en $[0,1]$.

5. Cuando la integral de Riemann intenta calcular el área bajo la gráfica de una función continua $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ recurre a la siguiente definición: $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f(x)\,dx$. Si tal límite existe y es finito, se dice que la integral es convergente. La integral se dice absolutamente convergente si utilizando el mismo método, podemos calcular $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ y el resultado es finito.
(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ es convergente si y sólo si $\alpha < 1$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ es convergente si y sólo si $\alpha > 1$.
(b) Si $f, g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, $g \geq 0$, $|f| \leq g$ y $\int_0^{+\infty} g dx$ es convergente, entonces $\int_0^{+\infty} f dx$ es absolutamente convergente.
(c) Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes integrales para $m \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (|\log x|)^m dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^m} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \tfrac{\cos x}{1+x^2} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \tfrac{\sin x}{x^m} dx \quad .$$

(c) ¿ Cuál sería lo equivalente al apartado (a) en los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$?

6. (a) Si $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, calcular la medida del conjunto $\{x \in [0, \frac{1}{\pi}] : f(x) \geq 0\}$ (Aquí es útil recordar que $\log 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$).
(b) Calcular la medida de $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (n + r^n, n + 2r^n)$ si $0 < r < \frac{1}{2}$.

7. Si $E_0 = [0,1]$, dividimos E_0 en tres intervalos de longitud $1/3$ y definimos $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Definimos E_2 dividiendo cada intervalo en E_1 en tres intervalos de longitud $\frac{1}{3^2}$ y quitando el intervalo central. Procediendo de esta forma, obtenemos una familia de conjuntos $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \cdots$ tal que cada E_k es la unión de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$ que son disjuntos dos a dos. Al conjunto $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$ se le llama conjunto ternario de Cantor. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) $m(C) \leq m(E_k) = (\frac{2}{3})^k$ para todo $k \geq 0$.
(b) $m(C) = 0$. Mostrar que $\aleph_C$ integrable de Riemann y C tiene contenido nulo en $[0,1]$. ¿ Es la función característica de todo conjunto medible en $[0,1]$ con medida nula integrable de Riemann en $[0,1]$?.
(c) Si $E_k = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{2^k}$ y $S = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{3^j}$, donde $c_j \in \{0,2\}$, entonces S es uno de los extremos izquierdo de alguno de los intervalos J_m y $J_m = [S, S + \frac{1}{3^k}]$ (utilizar inducción).
(d) $x \in C$ si y sólo si existe una sucesión $\{c_j\}$ tal que $c_j \in \{0,2\}$ para todo j y $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{3^j}$. Además, esta representación es única.
(e) El cardinal de C es el cardinal del continuo c, es decir, igual al cardinal de $\mathbb{R}$.
(f) Deducir que la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{M}$ tiene cardinal 2^c, es decir, igual al cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

8. Si A y E son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$, probar los siguientes resultados.

(a) Si $E+x=\{y+x: \ y\in E\}$, entonces $m^*(E+x)=m^*(E)=m^*(E-x)$.
(b) $(E+x)^c=E^c+x$ y $A\cap(E+x)=((A-x)\cap E)+x$.
(c) Si E es medible, entonces $E+x$ es medible y $m(E+x)=m(E)$.
(d) Si $\lambda E=\{\lambda x: \ x\in E\}$, entonces $m^*(\lambda E)=\lambda m^*(E)$.
(e) $\lambda^{-1}(A\cap(\lambda E))=(\lambda^{-1}A)\cap E$, $\lambda^{-1}(A\cap(\lambda E)^c)=(\lambda^{-1}A)\cap E^c$.
(f) Si E es medible, entonces λE es medible y $m(\lambda E)=\lambda m(E)$.
(e) Si E es medible, entonces $-E$ es medible y $m(-E)=m(E)$. Deducir que $m(\lambda E)=|\lambda|m(E)$ si $\lambda\in\mathbb{R}$ y E es medible.
(g) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función y $\mathcal{A}=\{E\in\mathcal{B}: f^{-1}(E)\in\mathcal{B}\}$. Mostrar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$. Mostrar que $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ si f es continua. ¿Qué conclusiones podemos sacar de este apartado del problema **8.** y de los anteriores?

9. (a) Probar que los subconjuntos medibles de Lebesgue de medida nula son los conjuntos $E\subset\mathbb{R}$ tal que $m^*(E)=0$.
(b) Mostrar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ tiene medida nula. En particular, la medida de Lebesque es capaz de medir la longitud de $\mathbb{Q}$ y $m(\mathbb{Q})=0$.
Sea E un conjunto medible de Lebesgue y $\epsilon>0$.
(c) Probar que existe un abierto V que contiene a E tal que $m(V\setminus E)<\epsilon$.
(Empezar por el caso $m(E)<+\infty$ y observar que todo $E\in\mathcal{M}$, se puede escribir como $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E\cap(-n,n)$)
(d) Probar que existe un cerrado F contenido en E tal que $m(E\setminus F)<\epsilon$.
(Aplicar (a) al conjunto E^c)
(f) Deducir que

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(V): E\subset V\ ,\ V \text{ es abierto}\} \\ &= \sup\{m(K): K\subset E\ ,\ K \text{ es compacto}\} \quad . \end{aligned}$$

(Como antes, empezar por el caso $m(E)<+\infty$ y observar que todo $E\in\mathcal{M}$ se puede escribir como, $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E\cap(-n,n)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E\cap[-n,n]$).
Observar, que todos los apartados del problema 9 son ciertos en $\mathbb{R}^n$, si en 9 (b) cambiamos $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}^n$.

10. Sea E un conjunto medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tal que $m(\mathbb{R}\setminus E)$ es nula. Mostrar que E es denso en $\mathbb{R}$ ¿Es lo mismo cierto en $[a,b]$, si $E\subset[a,b]$ y $m([a,b]\setminus E)=0$?