Relación 2

1. (a) Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$ es una familia numerable tal que $\mu(E_j) = 0$ para todo j, entonces $\mu(\bigcup_j E_j) = 0$.

(b) En $\mathbb{R}$ definimos la función de conjunto,

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } E \text{ no es numerable} \end{cases} ,$$

Probar que μ^* es una medida exterior en $\mathbb{R}$ y que la σ-álgebra $\mathcal{M}$ de conjuntos μ^*-medibles es $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ o } E^c \text{ es numerable}\}$.

(c) Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, definimos

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subset X : E = E_1 \cup D, \text{ donde } E_1 \in \mathcal{A}, \ D \subset E_2, \ E_2 \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(E_2) = 0\} \quad ,$$
$$\tilde{\mu}(E) = \mu(E_1) \text{ si } E \in \tilde{\mathcal{A}} \quad .$$

Mostrar que $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ es un espacio de medida completo que contiene a $\mathcal{A}$ y que extiende la medida μ. El espacio $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ se llama la compleción ("completación") de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(d) Mostrar que $(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{m}) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

(f) Prueba que si $E \subset \mathbb{R}$ tiene interior no vacio, entonces $m^*(E) > 0$.

(g) Comprobar que (e) y (f) son también ciertos en $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Sea $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida finita en $\mathbb{R}$ y $f(x) = \mu\left((-\infty, x]\right)$. Mostrar que f, llamada función de distribución de μ, es monótona creciente, continua por la derecha en todo $\mathbb{R}$ y sólo continua en aquellos $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mu\left(\{a\}\right) = 0$. Además,

$$\mu\left((a, b]\right) = f(b) - f(a) \ , \text{ si } \quad -\infty < a < b < +\infty \quad .$$

(b) Calcular la función de distribución asociada a la medida de Dirac δ en $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$.

(c) Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible, mostrar que $\int_{\mathbb{R}} g d\delta = g(0)$.

(d) Mostrar que,

$$\int_{[a,b]} d\mu = f(b) - f(a^-) \quad \text{y} \qquad \int_{[a,b)} d\mu = f(b^-) - f(a^-) \ ,$$

si $-\infty < a < b < +\infty$.

(e) Calcular f, si $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n$ y δ_n es la delta de Dirac en $n \in \mathbb{N}$.