Relación 4

1. Sean $f,\ g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones integrables en $\mathbb{R}$. Probar que
(a) $h(x,y)=f(x)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^2$ y

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dA=\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\int_{\mathbb{R}} g(y)dy \quad .$$

(Para la medibilidad de h observar que, $\aleph_A(x)\aleph_B(y)=\aleph_{A\times B}(x,y)$ y aproximar f y g por sucesiones de funciones simples).
(b) La convolución de f y g,

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy,\ x\in\mathbb{R}$$

es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{\mathbb{R}} f*g(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy.$$

Además,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f*g|\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|g|\int_{\mathbb{R}}|f|\,dx.$$

4. (a) Sean $f,\ g,\ h$ y $u:(0,1)\times(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $h(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$ y $u(x,y)=-\frac{x^2}{\sqrt{y}}$. Estudiar cuál de estas funciones es integrable y cuál no lo es en su dominio de definición
(b) Indicar para qué valores de α es integrable la funcion $f(x)=\|x\|^{-\alpha}$ en el interior o exterior de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$.
(c) Estudiar la integrabilidad de $g(x)=(1+\|x\|)^{-\alpha}\log\|x\|$ en $\mathbb{R}^n$.
(d) Estudiar si f es integrable en $\mathbb{R}^2$, donde

$$f(x,y)=\begin{cases} x^{-3} & \text{si } 0<y<|x|<1,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

5. Estudiar cuáles de las siguientes integrales son finitas.

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|x|}{1+(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV,\quad \int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{-x^2-y^2-xy}}{x^2+y^2}\,dA,$$
$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1-\cos x}{|x|^{\frac{5}{2}}(1+x^2+y^2)}\,dA,\quad \int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{-2x^2-3y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA,$$
$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{y^2\sin^2 x}{x^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+4)}\,dA,\quad \int_{B_1((1,1,0))}\frac{1}{[(x-1)^2+(y-1)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\,dV.$$

6. Probar que la función $(x,y)\to e^{-y}\sin 2xy$ es integrable para la medida de Lebesgue sobre $[0,1]\times[0,+\infty)$, y deducir el valor de

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}\sin^2 y}{y}\,dy.$$

7. Sea $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, definida para $x > 0$ e $y > 0$.
(a) Prueba que f es integrable en su dominio de definición.
(b) Deduce el valor de $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\, dx$.

8. Sea f una función medible no negativa en $\mathbb{R}$ y $g(t) = m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\})$.
(a) Probar que se verifica la identidad $\int_{\mathbb{R}} f dx = \int_0^{+\infty} g(t)dt$.
(Mostrar que $E_f = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) : f(x) > t\}$ es medible en $\mathbb{R}^2$ y aplicar el teorema de Fubini a $\aleph_E(x,t)$. Para mostrar que E_f es medible, $E_f = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{S_n}$, donde $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \ldots$ son simples y $\lim_{n\to+\infty} S_n = f$).
(b) Probar que $\int_{\mathbb{R}} f^p dx = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}g(t)\, dt$ si $1 \leq p < \infty$ (Utilizar (a) y un cambio de variable).

9. Mediante un cambio de variables lineal calcula

$$\iint_E (x+y)e^{x-2y} dA,$$

siendo E el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

10. Seguir los siguientes pasos para mostrar que $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$.
(a) $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$.
(b) Las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi_i(x_1,x_2) = x_i$, $i = 1,\ 2$ son continuas y

$$\Omega_i = \{E \in \mathcal{B}_1 : \pi_i^{-1}(E) \in \mathcal{B}_2\}$$

es una σ-álgebra que contiene todos los abiertos de $\mathbb{R}$.
(c) Para todo E y $F \in \mathcal{B}_1$, $E \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times F \in \mathcal{B}_2$.

11. Mostrar que $m_2^*(E \times \mathbb{R}) = 0$ si $E \subset \mathbb{R}$ y $m_1^*(E) = 0$ (Mostrar primero que $m_2^*(E \times (-n,n)) = 0$ para todo $n \geq 1$) .

12. Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ una función medible, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$.
(a) Mostrar que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy = R^n \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx,$$

si $g(x) = f(Rx + x_0)$.
(b) Relacionar mediante la fórmula anterior, el cálculo de $m(B_R(x_0))$ con $m(B_1)$ en $\mathbb{R}^n$.
(c) Sea $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una rotación. Mostrar que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(Px)\, dx.$$

(d) Mostrar que

$$\int_{B_1} f(x+2y)\, dxdy = \int_{B_1} f(\sqrt{5}x)\, dxdy,$$

si $f : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.