Relación 5

1. Demostrar que $C([0,1])$ no es un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \quad .$$

2. Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio de Hilbert H que cumple

$$\lim_{n\to+\infty} < x_n, y >=< x, y > \quad \text{para todo } y \in H \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} ||x_n|| = ||x||,$$

entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ en H.

3. Sea M el subespacio vectorial de l^2 generado por el vector $(1, -1, 0, 0, ...)$. Dar la descomposición de los elementos de l^2 como suma de un vector en M y otro en $M^\perp$.

4. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio de H. Mostrar que M es denso en H si y sólo si $M^\perp = \emptyset$. Asumiendo que $C([a,b])$ y $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ son densos respectivamente en $L^2([a,b])$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$, mostrar que el teorema de la proyección puede ser falso cuando M no es cerrado.

5 Si $M = \{x : Lx = 0\}$, donde $L \neq 0$ es un funcional lineal continuo sobre H. Probar que $M^\perp$ es un espacio vectorial de dimensión uno.

6.. Utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, ortonormalizar el conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ en $L^2(-1,1)$.

7. Encontrar

$$\min_{a,b,c\in R} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

8. Aceptando que el sistema trigonométrico es una base ortonormal escribir la igualdad de Plancherel para la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi)$.

9. Consideramos en $H = \mathbb{R}^3$ el producto escalar

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

y el subespacio $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Hallar una base ortonormal de M.

(b) Hallar la distancia de $(1, 10, 0)$ al subespacio M.