Relación 6

1. Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ para algún $1 < p < \infty$. Probar que la función $g(x) = \frac{f(x)}{1+|x|}$ está en $L^1(\mathbb{R})$ y que existe una constante $c(p)$ tal que

$$\|g\|_1 \leq c(p)\|f\|_p \quad .$$

¿Qué ocurre si $p = \infty$?. Encontrar dos funciones f y g en $L^1([0,1])$ tal que $fg \notin L^1([0,1])$.

2. Si $f(x) = 1/\|x\|^\alpha$ en $\mathbb{R}^3$ y $1 \leq p < +\infty$, determinar los valores de α para los que $f \in L^p(B_1)$. ¿ Cuáles son los valores de α para los que $f \in L^p(\mathbb{R}^3 \setminus B_1)$?. Estudiar la respuesta a las mismas preguntas cambiando el espacio $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

3. Estudiar la convergencia puntual, uniforme, en $L^1(\mathbb{R})$ y en $L^2(\mathbb{R})$ de las sucesiones de funciones

$$nx^{-3}e^{-n/(2x^2)} \quad , \quad \aleph_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} \sin^2(\pi/x) \quad , \quad \frac{n}{n^2x^2+1} \quad , \quad \frac{ne^{-x^2}}{n^2x^2+1}$$

4. Si $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, comprobar las siguientes afirmaciones:
(a) $g \in L^q(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq q \leq \infty$.
(b) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_n(x)}{1+x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx \quad .$$

5. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) Si $1 \leq p \leq \infty$, $f_n \to f$ en $L^p(d\mu)$ y $g_n \to g$ en $L^{p'}(d\mu)$, entonces $f_ng_n \to fg$ en $L^1(d\mu)$.
(b) Si c es la medida de contar en $\mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(dc) = l_p = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

y

$$\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

(c) ¿Qué es $L^\infty(dc) = l_\infty$?.
(d) Escribir la desigualdad de Hölder asociada a los espacios l_p y $l_{p'}$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $1 \leq p < \infty$ en términos de sucesiones.

6. Probar que las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) Si $\mu(X) < +\infty$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una función convexa y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int \varphi \circ f d\mu \quad \text{(Desigualdad de Jensen).}$$

Escribir la desigualdad correspondiente para $\varphi(x) = x^2$, $\varphi(x) = e^x$, $X = [a,b]$ y $d\mu = dx$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$, $f \in L^q(d\mu)$ y $1 \le p \le q \le \infty$, entonces $f \in L^p(d\mu)$ y

$$\mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \le \mu(X)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad .$$

Esto muestra que bajo dichas hipótesis, $L^q(d\mu) \subset L^p(d\mu)$. En particular, el espacio $L^q([0,1])$ está contenido en $L^p([0,1])$ si $1 \le p \le q \le \infty$.

(c) $L^q([0,1]) \subsetneq L^p([0,1])$ si $1 \le q < p \le \infty$.

(d) Probar que en $\mathbb{R}$ ninguna de las inclusiones $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ es cierta para $p \neq q$.

(e) Si $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ para algún par $1 \le p < q \le \infty$, entonces $f \in L^r(\mathbb{R})$ para todo r tal que $p \le r \le q$.

(*Sugerencias*: En (a) y (b) se puede suponer para simplificar que $\mu(X) = 1$. Mostrar primero que (a) es cierto para $f = S$ una función simple y positiva. (b) se puede probar utilizando (a) con $\varphi(x) = x^{q/p}$ o con la desigualdad de Hölder haciendo $g \equiv 1$. Para (e), dividir la integral en dos regiones, donde $|f| \le 1$ y donde $|f| > 1$).

7. Si $T(f)(t) = \int_0^t f(s)ds$, mostrar que V es un operador lineal acotado de $H = L^2(0,1)$ en sí mismo, con norma $\|V\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\mathcal{L}(H,H)$.

8. Comprobar las siguientes afirmaciones,

(a) $f/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$ si $2 < p \le \infty$ y $f \in L^p([0,1])$.

(b) El operador,

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{y}}\, dy \quad ,$$

es lineal y acotado de $L^p([0,1])$ en $L^\infty([0,1])$ si $2 < p \le \infty$.

9. Sea $K(x,y) = \frac{1}{y^{1/3}x^{1/4}(x+y+1)}$. Mostrar que,

(a) $K \in L^2\left((0,1) \times (0,1)\right)$.

(b) El operador, $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$, es lineal y acotado de $L^2(0,1)$ en $L^2(0,1)$.

10. Sea $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+(x-y)^2} f(y)\, dy$. Mostrar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y que su norma, $\|T\|$, verifica la desigualdad, $\|T\| \le 1$.

11. Sea

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+xy} f(y)\, dy \quad \text{si} \quad x > 0 \quad .$$

Probar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(0,+\infty)$ en $L^\infty(0,+\infty)$ cuya norma verifica, $\|T\| \le 1$.

12. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $w \geq 0$ y μ la medida definida por $\mu(E) = \int_E w(y)dy$. Entonces, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es medible,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)w(y)dy \quad .$$

(b) Escribir la desigualdad de Hölder para los espacios $L^p(wdx)$.
(c) Si $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 \quad .$$

(*Sugerencia* : Para (c), observar que, $|g(y)| = |g(y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}$ y con la desigualdad de Hölder mostrar que

$$|f * g|^p(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|dy \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \right)^{p/p'} \quad .$$

Integrar esta desigualdad con respecto a la variable x).