ANALISIS MATEMATICO II. $2^{\underline{o}}$ FISICAS. $1^{\underline{a}}$ RELACION

1. Resolver o hallar: $\frac{1}{z-i}+\frac{2-i}{1+i}=\sqrt{2}$, $z^4=-1$, $z^2=i$, $(3+i)+(7-2i)$, $(2+i)(6+3i)$, $(-1-i)(5+i)$, $\frac{3+i}{7-i}$, $\frac{-3+2i}{5+i}$, $(1+i)^{12}$.

2. Hallar el módulo y argumento principal de los complejos $-2+2\sqrt{3}i$ y $\cos\alpha - i\sin\alpha$, siendo $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3. Calcular usando la fórmula de De Moivre $\cos 5\alpha$ y $\sin 5\alpha$ en términos de $\cos\alpha$ y $\sin\alpha$.

4. Calcular $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ y $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

6. Resolver
a) $az^2+bz+c=0$, $a\neq 0$.
b) $z^3+3z^2+3z+3=0$.
c) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

7. Si $z=x+iy$ hallar las partes real e imaginaria de

$$z^2 \quad , \quad \frac{1}{z} \quad , \quad \frac{z-1}{z+1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{z^2} \quad .$$

8. Calcular las soluciones de $z^2=i$, $z^2=-i$, $z^2=1+i$ y $z^2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

9. Comprobar que $2+i$ es una de las soluciones de $z^3=2+11i$ y encontrar las otras soluciones.

10. Indicar que representan geometricamente las siguientes ecuaciones y desigualdades

$$|z-1-i|=1 \quad , \quad |z-1|=|z+i| \quad , \quad |z-1+i|\geq|z-1-i| \quad .$$

11. Representar los siguientes dominios

$$|z-2+i|\leq 1 \quad , \quad |2z+3|>4 \quad , \quad \Im z>1 \quad , \quad \Im z=1 \quad , \quad 0\leq \arg z<\pi/4$$

$$|z-4|\geq|z| \quad , \quad |z|=2\cos(\arg z) \ .$$

12. Calcule las siguientes raices:

$$\sqrt[4]{-1}\ ,\ \sqrt[4]{1-i}\ ,\ \sqrt[3]{i}\ ,\ \sqrt[4]{-i}\ ,\ \sqrt[4]{1}\ ,\ \sqrt[3]{-1+i}\ ,\ \sqrt{2-2\sqrt{3}i}\ .$$

13. Calcular las siguientes sumas

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx \quad , \quad \cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

$$\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x \quad , \quad \cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$$

(Sugerencia: considerar sumas geométricas de razón e^{ix}.)

14. Representar gráficamente los puntos del plano complejo que satisfacen las ecuaciones o desigualdades:
a) $z\overline{z} = 36$ b) $(2+i)z+1=0$ c) $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, $|z| \geq 2$ d) $\Re(\frac{1}{z}) < 1/2$
e) $\Re(z^2) > 0$

15. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$.

16. Escribir

$$\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

en forma polar. (Sugerencia: $1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$).

17. Calcular las soluciones de

a) $e^z = 0$ *b)* $e^{iz} = 1+i$ *c)* $e^{iz} + e^{-iz} = 2$ *d)* $e^{iz} - e^{-iz} = 2i$.

18. Sea $z = x+iy$. Represente gráficamente las siguientes curvas y compruebe que son ortogonales entre sí. (En general, si $f = u+iv$ es analítica las curvas de nivel $u = cte.$, $v = cte.$ son ortogonales)
a) $\Re(z^2) = cte$, $\Im(z^2) = cte$.
b) $\Re(\frac{1}{z}) = cte$, $\Im(\frac{1}{z}) = cte$.

19. Halle los rangos de las siguientes funciones $f(z)$ definidas sobre los siguientes dominios
a) z^3 en $0 < \theta < \pi/2$, $0 < r < +\infty$.
b) $2iz$ en $0 \leq x \leq 2$ $0 \leq y \leq 1$.
c) $1/z$ en $y > x$.
d) $z^{1/3}$ en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
e) e^z en $0 \leq y \leq \pi/2$ y $-\infty < x < +\infty$.