ANALISIS MATEMATICO II. $2^{\underline{o}}$ FISICAS. $2^{\underline{a}}$ RELACION

1. Encuentre $f'(z)$ cuando

$$a)\ f(z)=3z^2-2z+4 \qquad b)\ \ f(z)=\frac{z-1}{z+1} \qquad c)\ f(z)=\sin(z^2+4)$$

2. Para las funciones

$$\frac{1}{z}\quad ,\quad \frac{z^2-1}{z-i}\quad ,\quad \frac{z+1}{z^3+1}\quad ,\quad \frac{z^4+16}{z^4-16}\quad ,\quad \sin(1/z)$$

determinar sus discontinuidades evitables (puntos posibles de discontinuidad en los que la función realmente tiene límite complejo). Calcular también sus límites en $z=\infty$.

3. Estudiar la derivabilidad de las funciones

$$x^2+xy-i(y+1)\quad ,\quad x^2-y^2-2xy+i(x^2-y^2+2xy)$$

4. Sea $u(x,y)=4x^3y-4xy^3+x+1$. a) Probar que u es armónica en todo el plano. b) Encontrar una función analítica cuya parte real sea u. c) Encontrar una función analítica cuya parte imaginaria sea u. d) Explicar la diferencia entre b) y c).

5. Encontrar los valores de k para los que $u(x,y)=(e^{2y}+e^{ky})\sin 2x$ es armónica. Determinar su armónica conjugada en los casos posibles.

6. Encontrar (si existen) funciones armónicas de la forma :

$$a)\ u=\varphi(ax+by)\quad ,\quad b)\ u=\varphi(x^2+y)\quad .$$

7. a) Encontrar todas las funciones analíticas de la forma $f(z)=u(x)+iv(y)$.

b) Probar que si $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$, también lo es $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$. ¿Que podemos decir de $h(z)=f(\overline{z})$?.

c) Si v es armónica conjugada de u, concluir que uv y $e^u\cos v$ son funciones armónicas.

8. Explique por qué las siguientes funciones no son analíticas en nigún punto:

$$a)\ f(z)=xy+iy \qquad b)\ f(z)=e^y(\cos x+i\sin x)$$

9. Escribiendo $f=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ donde $z=re^{i\theta}$, obtener las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

$$u_r=\frac{v_\theta}{r}\quad ,\quad v_r=-\frac{u_\theta}{r}$$

10. Determine si las siguientes funciones $u(x,y)$ son armónicas y (donde sea posible) halle la función armónica conjugada:

$$a)\ x^4-6x^2y^2 \qquad b)\ e^x\cos y \qquad c)\ x^3-3xy^2 \qquad d)\ 3+r^5\cos 5\theta$$

11. a) A partir de la definición de las funciones trigonométricas compruebe las identidades

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad , \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z) \quad , \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$$

b) Relacionar las funciones seno y coseno con las funciones coseno y seno hiperbólico.

12. Verdadero o falso:
a) $e^{2\pi i z} = \left(e^{2\pi i}\right)^z = (1)^z = 1$.
b) $\log z^2 = 2\log z$.
c) $\frac{d}{dz}(\log z) = 1/z$, donde $\log z$ denota la rama principal del logaritmo.

13. Determine todos los posibles valores de los números dados: 1^i , $\sin(2+3i)$, $(1-i)^i$, i^i.

14. Halle el valor del módulo de la función $w = \sin z$ y mostrar que no existe $\lim_{z\to\infty} \sin z$. Estudiar si existe $\lim_{z\to\infty} \cos z$.

15. Halle todos los valores posibles de $\arcsin(i\pi/3)$ y $\tanh^{-1}(0)$.

16. Encuentre todas las raices de las ecuaciones $e^z = -3$ y $\log z = i\pi/2$.

17. Halle todos los ceros de las siguientes funciones:

$$e^z \quad , \quad \log z \quad , \quad \sinh z \quad , \quad z^2 + 2z \quad , \quad \cos z \quad , \quad \sin(z^3) \quad , \quad e^{\sin z} \ .$$

18. Halle la función analítica $w = f(z)$ cuya parte real es $u(x,y) = 2e^x \cos y$ y tal que $f(0) = 2$.

19. Encontrar una extensión analítica de la función de variable real $\sqrt{1+\sqrt{x}}$ y calcular su derivada.

20. Considerar la región Ω en el siguiente dibujo. Describir una forma natural de medir ángulos en Ω y construir una rama logarítmica en Ω. Si $\sqrt{1} = 1$ para la raiz cuadrada generada por la rama logarítmica, ¿cual es el valor de $\sqrt{4}$?.