ANALISIS MATEMATICO II. $2^{\underline{0}}$ FISICAS. $3^{\underline{a}}$ RELACION

1. Calcular las integrales

$$\int x\ dz, \qquad \int y\ dz, \qquad \int \overline{z}\ dz,$$

a lo largo de los caminos,

(1) el segmento rectilineo de 0 and $1-i$,
(2) alrededor del círculo $|z|=1$,
(3) en el círculo $|z-a|=R$.

2. Si γ es el semicírculo $|z|=R$, $|\arg z|\le \pi/2$, $R>1$ mostrar que

$$\left|\int_\gamma \frac{\log z}{z^2}\ dz\right| \le \frac{\pi}{R}\left(\log R + \frac{\pi}{2}\right) \quad ,$$

y concluir que el valor de la integral tiende a cero si $R\to+\infty$.

3. Calcular $\int_{|z|=1} |z+1|\ |dz|$.

5. Calcular las siguientes integrales

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z}\ dz \quad , \qquad \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right)\ dz \quad , \qquad \int_1^3 (z-2)^2\ dz\ .$$

6. Sea γ la circunferencia unidad. Mostrar que $\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\ dz = 2\pi i$ y deducir la fórmula

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos\theta}\cos\left(k\sin\theta\right)\ d\theta = 2\pi\ .$$

7. Calcular

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)}{(z-1)(z-2)}\ dz \quad , \qquad \int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\ dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z|=3$.

8. Probar que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\ dx = \frac{\pi}{4}$, integrando e^{iz^2}/z a lo largo de la frontera del dominio $\varepsilon<|z|<R,\ 0<\arg z<\pi/2$ y pasando al límite.

9. Probar que toda función entera f con parte real no negativa es necesariamente constante. (Considerar $g=\frac{1}{f+1}$ y el teorema de Liouville).

10. Dada la función $v(x,y)=x^3-3axy^2$, se pide:

(1) ¿Para qué valores del parámetro a la función anterior es armónica?.
(2) Encontrar la función $u(x,y)$ armónica conjugada de la anterior función armónica $v(x,y)$.
(3) ¿Cuál es la función analítica $f(z)=u+iv$ de la cual son, respectivamente, su parte real e imaginaria?.
(4) Encontrar los vectores tangentes a las curvas $u=cte.$ y $v=cte.$ ¿En qué región son estos vectores ortogonales?. ¿En qué región estos vectores están definidos?.
(5) Sea $f(z)=u+iv$. Como u y v son armónicas, también lo es $u+v$. Encontrar en términos de $f(z)$ la función $g(z)$ cuya parte real sea $u+v$.

11. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Sea f analítica en $|z| < 2$. Calcular en términos de f y sus derivadas la integral
$$\int_{|z|=1} (z + 2 + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} \, dz \quad .$$

(2) Hallar las soluciones de $1^z = 2i$.

(3) Calcular el anillo de convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z^n}{n^2} + \frac{n^2}{(2z)^n} \right) \quad .$$

12. (1) Encontrar todas la funciones armónicas v de dos variables de la forma $v = \phi(xy)$.

(2) Encontrar las funciones analíticas $f(z)$ que tienen por parte imaginaria las funciones v anteriormente halladas

13. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Hallar todas las soluciones de la ecuación $(e^z + 1)^3 + 8 = 0$.

(2) Calcular todos los valores posibles de $(\cos i)^i$.

(3) Calcular el argumento principal del complejo $e^{it} + 1$ si $t \in (-\pi, \pi)$.

14. Resolver las siguientes preguntas:

(1) Encontrar todos los polinomios armónicos de la forma
$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad .$$

(2) Calcular una función $v(x, y)$ para la que $u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera.