ANALISIS MATEMATICO II. $2^{\underline{o}}$ FISICAS. $4^{\underline{a}}$ RELACION

1. a. Mostrar que si f es una función entera y $|f(z)| \leq 10|z|$ para $|z| \geq 1$, entonces f es un polinomio de grado uno. ¿Que podemos decir si $|f(z)| \leq 10|z|^2$?.

b. Probar que la función $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ es estrictamente creciente en $(0, 1)$ si f es analítica y no constante en B_1.

2. Calcular las series de potencias centradas en $z = 0$ para las funciones $w = \sinh z$ y $w = \cosh z$.

3. Desarrollar en serie de Taylor alrededor de $z = a$ las funciones,

$$\begin{array}{llll}
(a)\ \dfrac{1}{1-z}\ , & a=-1, & (b)\ \cos z\ , & a=\dfrac{\pi}{2}, \\
(c)\ \dfrac{1}{z} & a=1, & (d)\ \log z\ , & a=1, \\
(e)\ e^z & a=1, & (f)\ \dfrac{z}{z^2-4z+13}\ , & a=0, \\
(g)\ \dfrac{z^2}{(z+1)^2} & a=0, & (h)\ \displaystyle\int_0^z \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi\ , & a=0,
\end{array}$$

Indicar el círculo más grande donde la representación es válida.

4. Encontrar el orden del cero para las funciones $w = z^2(\cos z - 1)$ y $w = 6\sin z^2 + z^2(z^4 - 6)$.

5. Hallar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(nz)^n\ , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!z^n}{n^n}\ , \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}\ .$$

6. Hallar la suma de la serie

$$\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\cdot z + \sin\frac{6\pi}{3}\cdot z^2 + \cdots\ .$$

7. Desarrollar las siguientes funciones en serie de potencias centradas en $z = 0$ y hallar su radio de convergencia,

$$\frac{2}{(1-z)^3}\ , \qquad \log(1+z)\ , \qquad \frac{e^{az}-1}{z}\ , \qquad \arctan z$$

8. ¿Cual es el radio de convergencia de la serie de potencias centrada en $z = -1 + i$ para la rama principal de la función $\log z$?.

9. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{z^2}$ centrado en -1.

10. Encontrar una serie de Taylor que sea solución de la ecuación $f'(z) = 1 + zf(z)$ con la condición inicial $f(0) = 0$. ¿Cual es el radio de convergencia?.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

11. Desarrollar la función $(z^3 - z)^{-1}$ como una serie de Laurent en los anillos,

$$0 < |z| < 1 \ , \qquad 1 < |z| \ , \qquad 0 < |z-1| < 1 \ , \qquad 1 < |z-1| < 2 \ .$$

12. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Laurent centradas en $z = 0$,

$$ze^{\frac{1}{z}} \quad , \quad \sin z + \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad .$$

13. Clasificar las singularidades aisladas de las funciones

$$\frac{z}{z^3+z} \quad , \quad \frac{e^z}{1+z^2} \quad , \quad e^{\frac{1}{z}} \quad , \quad \frac{\log(1+z) - z}{z^m}$$

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \qquad , \quad \frac{1-e^z}{1+e^z} \quad .$$

14. Construya una función que tenga una singularidad evitable en $z = -1$, un polo de orden 3 en $z = 0$ y una singularidad esencial en $z = 1$.

15. Determinar y clasificar las posibles singularidades de $f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}$. Hallar la parte singular del desarrollo de Laurent de f en potencias de z en un anillo $0 < |z| < R$. Cul es el valor de R?.

Calcular

$$\int_{|z|=1} f(z)dz \quad y \quad \int_{|z|=5} f(z)dz \quad .$$

16. Probar que las únicas funciónes enteras que no tienen una singularidad esencial en el punto de infinito ∞ son los polinomios. ¿Que tipo de singularidad tienen e^z, $\sin z$ y $\cos z$ en $z = \infty$?.

17. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(in) z^n \quad ,$$

- **a.** Hallar su radio de convergencia R.
- **b.** Comprobar que la serie coincide en el disco $|z| < R$ con la función racional

$$f(z) = \frac{2e - \left(1+e^2\right) z}{2\left(ez^2 - (1+e^2) z + e\right)} \quad .$$

- **c.** Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en los anillos $\frac{1}{e} < |z| < e$ y $|z| > e$.