ANALISIS MATEMATICO II. 2$^{\underline{o}}$ FISICAS. 5$^{\underline{a}}$ RELACION

1. Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} \quad , \quad |a| \neq 1 \ .$$

2. Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, dx \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)}\, dx \quad ,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\, dx \quad .$$

3. Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+2x+2}\, dx \quad , \quad 0 < a < 2 \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)}\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^2+1}\, dx \quad .$$

4. Calcular las siguientes integrales usando los caminos indicados

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)}\, dx \quad (0 < a < 2) \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x}\, dx \quad (a \neq 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}\, dx \quad (a \neq 0).$$

Utilizar en cada caso las funciones

$$\frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)} \quad , \quad \frac{e^{iaz}}{e^z - e^{-z}} \quad , \quad \frac{e^{iaz}}{e^z - 1} \quad ,$$

y los siguientes caminos de integración: para la primera integral el rectángulo de vertices $\pm R$ y $\pm R + 2\pi i$. Para la segunda el mismo rectángulo pero quitándole dos semicírculos de radio ε dentro del rectángulo y centrados en 0 y $2\pi i$. Para la tercera, el rectángulo de vértices 0, R, $R+2\pi i$ y $2\pi i$, pero quitándole dos semicírculos de radio ε centrados en 0 y $2\pi i$. En las dos últimas integrales olvidarse de la parte real del límite al hacer $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$.

5. Integrar la función $f(z) = \log(1-z)/z$ en el camino dado, hacer $\varepsilon \to 0$ y olvidándose de la parte imaginaria mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \log\sin(\theta/2)\ d\theta = -2\pi\log 2 \quad .$$

El camino es el círculo unidad quitándole un pequeño círculo de radio ε centrado en 1.

6. La teoría de los residuos se puede usar para calcular las sumas de algunas series como veremos en este problema.

a. Mostrar que si $a \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} \quad ,$$

mediante la evaluación de la integral de contorno

$$\int_{\gamma_N} \frac{\cot \pi z}{z^2+a^2}\ dz \quad ,$$

donde γ_N es un cuadrado con vertices $\pm(N+\frac{1}{2}) \pm (N+\frac{1}{2})i$ y haciendo $N \to +\infty$.

b. En general, si $f(z)$ es una función racional tal que $zf(z) \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$ cuyos ceros o polos no son números enteros y con polos en $z_1, z_2, \cdots, z_l$, mediante la evaluación de la integral

$$\int_{\gamma_N} f(z) \cot \pi z\ dz$$

demuestre que se verifica la siguiente fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left(f(z)\cot \pi z\right) \quad .$$

c. Para series alternadas $\sum(-1)^n f(n)$ se utiliza $\csc \pi z$ en vez de $\cot \pi z$. Calcular

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} \quad , \quad a \notin \mathbb{Z}$$

7. Para la función $f(z) = \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \frac{5}{z^5} + \cdots$, calcular

$$\int_{|z|=2} f(z)\ dz \ .$$