ANALISIS MATEMATICO II. 2º FISICAS. 6ª RELACION

1. Encontrar para las siguientes transformaciones y dominios la imagen correspondiente:

a. El disco $|z| < 1$ y $w = i\frac{z-1}{z+1}$.
b. El sector $\arg z < \pi/4$, $w = \frac{z}{z-1}$.
c. La banda $0 < x < 1$ y $w = \frac{z}{z-1}$.

2. Encontrar todas las transformaciones lineales fracionarias que llevan el semiplano superior en el interior del círculo unidad.

3. Utilizando la función exponencial encontrar una transformación conforme del dominio $|z| < 2$ y $|z-1| > 1$ en el semiplano superior.

4. Encontrar una transformación conforme de la banda $|\mathrm{Re}\ z| < 1$, $\mathrm{Im}\ z > 0$ en el sector $|\arg w| < \pi/4$.

5. Encontrar la transformación lineal fraccionaria que lleva los puntos -1, i, $1+i$ en los puntos 2, 3 y 4, y la que los lleva en 0,1 y ∞.

6. Encontrar los puntos simétricos al punto $3+4i$ respecto al círculo $|z-i| = 2$.

7. Transformar el círculo unidad en si mismo de forma que si $|\alpha| < 1$, α se transforme en 0 y $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ en 1.

8. Sea $f = u + iv$ una función analítica y F una función armónica. Probar que $F \circ f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$ es armónica en su dominio de definición.

9. Utilizando el problema 3 indicar como encontrar la temperatura de un plato $\Omega = \{z : |\mathrm{Re}\ z| < 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ con temperatura de 0° en la cara horizontal y de 1° en las verticales.

10. El recorrido de la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$ se conoce como la catenaria. Mostrar que la curvatura con signo de la catenaria es

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad .$$

En general, si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva plana mostrar que la curvatura con signo de α se puede calcular como

$$k(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{({x'}^2 + {y'}^2)^{3/2}}$$

11. Dada una función regular $k(s)$, $s \in I$, mostrar que la curva plana que tiene por curvatura $k(s)$ se puede parametrizar como

$$\alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s)\ ds + a\ ,\ \int \sin\theta(s)\ ds + b \right)\ ,\ \text{donde } \theta(s) = \int k(s)\ ds + \varphi\ .$$

Determinar las curvas de ecuaciones intrínsecas $k(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}$, $\tau(s) = 0$, $s > 0$.

12. Si $\alpha(t)$ es una curva tridimensional verificar que las siguientes fórmulas son ciertas (t es cualquier parámetro)

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \quad , \quad k = \frac{\sqrt{|\alpha'|^2|\alpha''|^2 - (\alpha' \cdot \alpha'')^2}}{|\alpha'|^3} = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \quad ,$$
$$\mathbf{b} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \quad , \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad , \quad \tau = -\frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \quad .$$

13. Parametrizar la espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ en términos de su longitud de arco y desde el punto $(0, 0)$.

14. Dada la curva (hélice)

$$\alpha(s) = (a \cos\left(\frac{s}{c}\right) \ , \ a \sin\left(\frac{s}{c}\right) \ , \ \frac{bs}{c}) \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 \ , \ a \ , b \text{ y } c > 0 \quad ,$$

mostrar que s es el parámetro de longitud de arco. Hallar la curvatura y la torsión de α. Hallar el plano osculador de α. Mostrar que la recta paralela a $\mathbf{n}(s)$ y que pasa por $\alpha(s)$ corta al eje OZ con un ángulo constante igual a $\pi/2$. Mostrar que las rectas tangentes a α forman con el eje OZ un ángulo constante.

15. Encontrar el triedro de Frenet, la curvatura y torsión de la curva $\alpha(t) = (3t - t^3, \ 3t^2, \ 3t + t^3)$.

16. Dada la curva en el espacio tridimensional $r(t) = \cos t \, e_1 + \sin t \, e_2 + \frac{t^2}{2} \, e_3$, se pide:

(1) Determinar la ecuación cartesiana de la curva.
(2) Determinar los vectores unidad tangente, normal principal y binormal en cualquier punto de la curva. ¿Están siempre definidos?
(3) Calcular la curvatura y la torsión en cualquier punto. ¿Dónde es la curvatura máxima? ¿Dónde se anula la torsión? ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia osculatriz en el punto en que se anula la torsión?
(4) Encontrar la ecuación paramétrica y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto $t = \pi/2$.
(5) Expresar la ecuación cartesiana de la familia de planos normales a la curva.

17. Calcular la envolvente de la familia de curvas $(x - 2\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$.

18. Calcular la envolvente de un segmento móvil AB de longitud constante cuyos extremos se apoyan en los ejes coordenados.

19. Calcular la evoluta del cicloide $\alpha(\theta) = (\theta - \sin\theta, \ \theta - \cos\theta)$.

20. Demostrar que si una curva en el espacio de torsión τ distinta de cero está sobre una esfera de radio a, entonces se cumple

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2 = a^2 \quad .$$