ANALISIS MATEMATICO II. 2º FISICAS. 7ª RELACION

1. Hallar la ecuación de la superficie tangente a la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

2. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^3$, $z = v^3$ y que sea paralelo al plano $x + y - z = 0$.

3. Probar que las ecuaciones paramétricas

$$x = a\,\frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}\ ,\ y = \frac{2bu}{1 + u^2 + v^2}\ ,\ z = \frac{2cv}{1 + u^2 + v^2}\quad ,$$

se reducen en su forma cartesiana a las ecuaciones del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4. Probar que las dos superficies $x^2+3y^2+2z^2 = 9$, $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24 = 0$, son tangentes entre sí en el punto $(2, 1, 1)$.

5. Encontrar la superficie envolvente de la familia de planos $u^3-3u^2x+3uy-z = 0$, donde u es el parámetro que determina cada plano de la familia. Lo mismo para la familia de planos $x \sin u - y \cos u + z - u = 0$.

6. En el elipsoide

$$x = a \sin u \cos v\ ,\ y = b \sin u \sin v\ ,\ z = c \cos u$$

encontrar su ecuación cartesiana y las curvas coordenadas $u = cte.$ y $v = cte.$

7. Encontrar la familia formada por los planos rectificantes de la hélice

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad .$$

Calcular la superficie envolvente de la anterior familia.

8. Encontrar la ecuación de un cono de revolución alrededor del eje OX con vértice en el punto $(a, 0, 0)$ y cuyo semiángulo en el vértice es $\pi/6$.

9. Demostrar que

$$r(u, v) = (\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}, uv)$$

es una representación paramétrica del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$. Mostrar que es una superficie reglada y calcular los coeficientes E, F, G de su primera forma fundamental en las coordenas (u, v).

10. Mostrar que si una curva plana viene dada en las formas implícita $F(x, y) = 0$, explícita $y = f(x)$ o en coordenadas polares $r = r(\theta)$, la expresión de la curvatura es respectivamente

$$-\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}} \quad , \quad \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{r + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \quad .$$

11. a. Mostrar que si en una superficie parametrizada $r = r(u, v)$ se verifica que $F = f = 0$, entonces las curvaturas principales son $\frac{e}{E}$ y $\frac{g}{G}$, y las curvas $u = cte.$ y $v = cte.$ son lineas de curvatura.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

b. Si $(0, \varphi(v), \psi(v))$, $a < v < b$ es una curva parametrizada por longitud de arco en el plano YZ tal que $\varphi(v) > 0$ en $[a, b]$, mostrar que la superficie

$$r(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \quad u \in (0, 2\pi) \ , \ v \in (a, b) \quad ,$$

es la superficie de revolución que genera la curva al girar alrededor del eje OZ. Calcular las curvaturas media y de Gauss de esta superficie y mostrar que los paparelos y meridianos son lineas de curvatura.

12. Verificar que la superficie

$$r(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v) \quad ,$$

es un toro de revolución si $a > r$. Analizar los parámetros utilizados. Calcular la curvatura Gaussiana y determinar los puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos del toro.

13. Para la superficie S definida como el grafo de una función $z = f(x, y)$, encontrar su primera y segunda forma fundamental, curvaturas media y Gaussiana en términos de f y sus derivadas.

14. Sea α el círculo unidad en el plano parametrizado por longitud de arco y $r(u, v) = \alpha(u) + v(\alpha'(u) + e_3)$ la superficie reglada generada por α y las direcciones dadas. Mostrar que esta superficie coincide con el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

15. Dada la hélice

$$\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, bu) \quad ,$$

calcular la superficie tangencial a α, $r(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$, su primera y segunda formas fundamentales, así como su curvatura media y Gaussiana.

16. Dada una superficie $r = r(u, v)$ mostrar que el vector unitario normal a la superficie es

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad .$$

Verificar que el área de la superficie es precisamente $A = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv$. De la misma manera, el ángulo θ que forman los vectores tangentes r_u y r_v es

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad .$$

Calcular las componentes de los vectores N_u y N_v respecto a la base $\{r_u, r_v\}$ en términos de E, F, G, e, f y g.