ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 1^{a} RELACION

1. En $\mathbb{R}^n$ con la norma euclídea mostrar:

(i) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (ley del paralelogramo);

(ii) $\|x+y\|\,\|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$;

(iii) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ (identidad de polarización).

2. Comprobar que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

son normas en $\mathbb{R}^n$.

Determinar constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|_1 \leq \|x\| \leq B\|x\|_1 \ , \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \ ,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Lo mismo con $\|\cdot\|_\infty$ en lugar de de $\|\cdot\|_1$.

3. Demostrar que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \ ,$$

para todo x, y en $\mathbb{R}^n$ y concluir que si $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|x_k\| \to \|x\|$ en $\mathbb{R}$.

Utilizando la identidad de polarización comprobar que si $x_k \to x$ e $y_k \to y$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\langle x_k, y_k\rangle \to \langle x, y\rangle$.

4. Sean $E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } [0,1]\}$,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Probar que E es un espacio vectorial y que las funciones así definidas son normas en E.