ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 2ª RELACION

1. Determinar los dominios de definición de las funciones:

(i) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$,   (ii) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$,

(iii) $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,   (iv) $f(x,y,z) = \log(xyz)$,

(v) $f(x,y,z) = \sqrt{\sin \pi(x^2+y^2)}$,   (vi) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

2. Esbozar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

(i) $f(x,y) = 1-x^2-y^2$,   (ii) $f(x,y) = x^2+4y^2$,

(iii) $f(x,y) = x^3-x$,   (iv) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

3. Calcular los límites en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(i) $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,   (ii) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,

(iii) $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,   (iv) $\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$,   (v) $(1+x^2y^2)^{-1/(x^2+y^2)}$.

4. Calcular los límites siguientes:

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+y)}{\log x}$,   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Analizar la existencia de los límites en $(0,0)$ para las funciones:

(1) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, si $y \neq 0$ y $f(x,y)=0$, si $y=0$.

6. Determinar el valor que deben tomar en $(0,0)$ las siguientes funciones para que sean continuas en $(0,0)$ si es posible.

(i) $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y-1)\right)$;   (ii) $f(x,y) = \left(e^{x+y}, \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.

7. Estudiar la continuidad uniforme de la funcion $f(x) = (x^{-2}, \cos x)$ en los intervalos $(0,1)$ y $(1,+\infty)$.

8. Probar que la función $f(x,y) = \dfrac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan x}{x^2+y^2}$, si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$ es continua en $(0,0)$.

9. Sean $p,\ q>0$. Analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^p|y|^q}{x^2+y^2-xy}$, según los valores de p y q.

10. Estudiar el límite en $(0,0)$ de las funciones :

$$\text{a) } f(x,y)=\frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} \quad , \text{ b) } f(x,y)=\frac{x^2y+x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}} \ .$$

11. Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $f(x_0)>0$. Probar que f es estrictamente positiva en un entorno de x_0.

12. Para $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, se define

$$\|T\|=\sup\{\ \|T(x)\|\ :\ \|x\|\le 1\ \}\ .$$

Mostrar que $\|T\|$ es una norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ y que $\|T\|$ es el mayor autovalor de la matriz asociada a T^tT, si T^t es la transpuesta de T.

13. Si $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, mostrar que T es inyectiva si y sólo si existe $m>0$ tal que

$$m\|x\|\le\|T(x)\|\ ,\ \text{para todo } x\in\mathbb{R}^n\ .$$