ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 3ª RELACION

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\ ,\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

ii)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

iii)

$$f(x,y)=\begin{cases}x\ , & |x|\leq|y|\ ,\\ y\ , & |x|>|y|\ .\end{cases}$$

iv)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\ ,\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

v)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , & (x,y)\neq(0,0)\ ,\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

2. Analizar la continuidad de $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ si

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{4x^2+y^2-1}\ , & \text{si } 4x^2+y^2\neq1 \text{ y } (x,y)\neq(0,0)\ ,\\ 0\ , & \text{si } 4x^2+y^2=1 \text{ ò } (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\}$. Estudiar la continuidad de f, calcular $\bar{A}$ y deducir si $f(\bar{A})$ es compacto.

4. Sea $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y sean $\alpha<\beta$. Demostrar que

$$\{\ x\in\mathbb{R}^n : \alpha\leq f(x)\leq\beta\ \}$$

es un cerrado de $\mathbb{R}^n$

5. Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ uniformemente continua en Ω. Demostrar que $\{f(x_k)\}$ es the Cauchy en $\mathbb{R}^m$, si $\{x_k\}$ es de Cauchy en Ω.

6. Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua en Ω. Mostrar que f es acotada en Ω, si Ω es acotado en $\mathbb{R}^n$.