ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 4ª RELACION

1. Calcular las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = xy$

ii) $f(x,y) = e^{xy}$

iii) $f(x,y) = x\cos x \cos y$

iv) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

v) $f(x,y) = x^y$

vi) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

vii) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

viii) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

viii) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ \beta \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Hallar la relación entre α y β para que existan las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

3. Analizar la diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

ii) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

v) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

vi) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)\log(x^2+y^2) \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

vii) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$

4. Calcular el vector gradiente y el plano tangente a:

i) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ en $(0,0,0)$.

ii) $f(x,y) = \log(x^2+2xy+1) + \int_0^x \cos^2 t\, dt$ en $(1,1)$.

5. Hallar las matrices asociadas a la diferencial de las funciones:

i) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

ii) $f(x,y,z) = (z\sin x, z\sin y)$.

iii) $f(x,y) = xy$.

iv) $f(x,y) = xy$.

v) $f(x,y) = (\sin(xy), \cos(xy), x^2y^2)$.

vi) $f(x,y) = x^{y+z}$.

vii) $f(x,y,z) = (z^{xy}, x^2, \tan(xyz))$.

6. Sean $f(x,y,z) = \sin(xy+z), (1+x^2)^{yz})$ y $g(u,v) = u+e^v, v+e^u)$.

i) Mostrar que f es diferenciable y calcular la matriz diferencial de f, Df.

ii) Mostar que g es diferenciable y calcular Dg.

iii) Calcular $D(g\circ f)$.

7. Calcular $\frac{\partial h}{\partial x}$ para las funciones:

i) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

ii) $h(x,y) = f(x, u(x,y))$.

ii) $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(z))$. iii) Calcular $D(g\circ f)$.

8. Hallar las diferenciales de las funciones compuestas:

i) $z = f(u,v)$, $u = x+y$, $v = x-y$.

ii) $w = f(u,v)$, $u = x+y+z$, $v = x^2+y^2+z^2$.

ii) $z = f(u,v)$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

9. Si ϕ es una función regular comprobar que

i) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, si, $z = \phi(x^2+y^2)$.

ii) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, si, $z = \frac{y^2}{3x}\phi(xy)$.

ii) $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$, si, $u = x^n f\phi(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta})$.