ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 5ª RELACION

1. Hallar los puntos de la superficie $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $z = 0$.

2. Estudiar si son de clase C^1 en un entorno del origen las funciones

(i) $f(x,y) = \begin{cases} x + x^2 y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} xy \log\left(x^2+y^2\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Hallar las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

(i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

(ii) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$

(iii) $f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}$

(iv) $f(x,y) = \tan \frac{x^2}{y}$

(v) $f(x,y) = x^y$

(vi) $f(x,y) = \log\left(x + y^2\right)$

(vii) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$

(viii) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

4. Si ϕ y ψ son funciones regulares comprobar que:

(i) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ siendo $u = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ siendo $u = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$

5. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de:

(i) $f(x,y) = \log\left(x + e^y\right)$ en $(1,0)$

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ en $(1,-1)$

6. Expresar el polinomio $P(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$ en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.

7. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden en el origen de las funciones:

(i) $f(x,y) = e^{x+y}$

(ii) $f(x,y) = \sin x \sin y$

8. Calcular los extremos locales de las funciones:

(i) $f(x,y) = xy^2(1-x-y)$

(ii) $g(x,y) = \log\left(1 + x^2 + y^2\right) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\, dt$

(iii) $h(x,y) = xye^{xy}$

9. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f tiene un máximo absoluto en Ω en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \Omega$. Demostrar que toda función continua no negativa en $\mathbb{R}^n$ que tiende a cero en el infinito tiene un máximo absoluto.

10. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Calcular los extremos absolutos de f.

11. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciónes en los dominios dados:

i) $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$, si $K = [0,1]\times[0,1]$.
ii) $g(x,y) = x^2+y^2-xy+x+y$, si $K = \{x \leq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ x+y \geq -3\}$.

12. Clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, en $(0,2\pi)\times 0, 2\pi)$.

13. Calcular el plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = -1$ en $(1,1,1)$.