ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 6ª RELACION

1. Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Se define $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Calcular Δu en coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (e^x, \sin(x+y), e^z)$. Mostrar que f es localmente invertible en $(0,0,0)$ y probar que existen puntos de $\mathbb{R}^3$ donde f no es localmente invertible.

3. Probar que $f(u,v) = (e^u + e^v, e^u - e^v)$ es localmente invertible en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y demostrar que la inversa local es global. Calcular dicha inversa y comprobar que su matriz Jacobiana es la inversa de la matriz Jacobiana de f.

4. Sea $f(x,y) = (x\cos y, \sin(x-y))$. Comprobar que f tiene inversa local en un entorno del punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y calcular la matriz Jacobiana de dicha inversa en $(0,0)$.

5. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + u + y = 0 \\ 2xz + x - z = 0 \end{cases}$$

define a x e y como funciones C^∞ de z y u en un entorno del origen. Si estas funciones son $x = f(z,u)$ e $y = g(z,u)$, mostrar que $G = (f,g)$ es invertible en un entorno de $(0,0)$.

6. Probar que la ecuación $xy = \log\left(\frac{x}{y}\right)$ admite una única solución $y = f(x)$ de clase C^∞ en un entorno del punto $\sqrt{e}$ y que verifica $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Deducir que la función f tiene un máximo local en $\sqrt{e}$.

7. Sea $F(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + \lambda y$, siendo λ un parámetro real.

(i) ¿Para qué valores de λ la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y como función implícita en un entorno del origen?

(ii) ¿Define la ecuación $F(x,y) = 0$ a x como función implicita diferenciable de y en un entorno del origen y para algún valor de λ?

(iii) Sea $y = \varphi(x)$ la función implícita determinada por $F(x,y) = 0$. Calcular el valor de λ para que el polinomio de Taylor de segundo orden de f en el origen tome el valor 1 en $x = 1$.

(iv) ¿Para que valores de λ tiene f un extremo en $x = 0$?.

8. Probar que la ecuación

$$\sin(yz) + \sin(xz) + \sin(xy) = 0\ ,$$

admite una única solución $z = f(x,y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(\pi, 0)$ que cumple $f(\pi,0) = 1$. Calcular el polinomio de Taylor de orden uno en el punto $(\pi, 0)$.

9. Determinar los valores de a para los que el sistema

$$\begin{cases} xz^3 + yu + az = 1 \\ 2xy^3 + u^2 z + a(y-1) = 0 \end{cases}$$

define a (x,y) como función implicita de (z,u) en un entorno del punto $(0,1,0,1)$.

Si denotamos dicha función por $(x, y) = G(z, u)$, calcular los valores de a para los que la función G admite una inversa local de clase C^1 en un entorno de $(0, 1)$.

10. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ sobre

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}$$

11. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4y^2 + z^2 = 1 \ , \ x - y = 0\}$$

12. Calcular el paralelepípedo de mayor volumen e inscrito en el ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

13. Hallar la mínima distancia entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$.

14. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$ y S el círculo de radio 1 centrado en el origen. Hallar los extremos de la restrición de f a S.

15. Hallar el mayor volumen que pueda contener una caja rectangular si el área de su superficie es de 10 m^2.