ANALISIS DE VARIAS VARIABLES I. 7ª RELACION

1. Sean $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$ ¿Converge f_n uniformente? ¿Qué ocurre si $0 \leq x < 1$?.

2. Considérese la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

- Muéstrese que esta serie converge puntualmente a $g(x) = \frac{1}{1-x}$ para x en el intervalo $(-1, 1)$.
- Si $0 < a < 1$, muéstrese que la convergencia es uniforme en el intervalo $[-a, a]$.
- Muéstrese que la convergencia no es uniforme en el intervalo $(-1, 1)$.

3. Sean $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ para x en el intervalo $[0, 2]$. Muéstrese que la sucesión de funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots$ converge puntualmente en el intervalo $[0, 2]$ pero que la convergencia no es uniforme.

4. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n(n!)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Analícese como podría mostrase que f es continua.

5. Muéstrese que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin nx)^2}{n^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

6. Sean $f_n : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x/(1+x)^n$.

- Demuéstrese que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ es convergente para x en $[1, 2]$.
- ¿Es uniformemente convergente?
- ¿Se cumple que $\int_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx$?

7. Aplicando el criterio M de Weierstrass, demostrar la convergencia uniforme en los intervalos indicados de las siguientes series funcionales:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leq x < +\infty$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leq x < +\infty$.

8. Sea $\mathcal{F} = \{f \in C([0, 1]) : f \text{ es } C^1,\ f(0) = 0 \text{ y } \|f'\|_\infty \leq 1\}$. Muéstrese que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto en $C([0, 1])$.

9. Muéstrese que existe un polinomio en dos variables $p(x, y)$ tal que

$$|p(x, y) - \sqrt{|x|^3 + |y|^3}| \leq 0,0001$$

para $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1000$.

10. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ y uniformemente acotada en $[a, b]$. Muéstrese que la sucesión

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$$

tiene una subsucesión que converge uniformemente en $[a, b]$.

11. Estudiar la derivabilidad de la sumas de las series funcionales en el problema **7** y si las derivadas se puede obtener como la suma puntual o uniforme de las series funcionales que se obtienen al derivar las series término a término.