Sea $\{x_{ij} : i, j = 1, 2 \ldots\} \subset [0, +\infty]$. y definimos

$$A = \sup_{N \geq 2} \sum_{i+j \leq N} x_{ij}, \quad B = \sup_{\substack{N_1 \geq 1 \\ N_2 \geq 1}} \sum_{i \leq N_1} \sum_{j \leq N_2} x_{ij},$$

$$B_1 = \sup_{N_1 \geq 1} \sum_{i \leq N_1} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij} \right)$$

$$B_2 = \sup_{N_2 \geq 1} \sum_{j \leq N_2} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} x_{ij} \right).$$

<u>Tma</u>: Se verifica que $A = B = B_1 = B_2$.

<u>Dem</u>:

$$\sum_{i \leq N_1} \sum_{j \leq N_2} x_{ij} \leq \sum_{i+j \leq N_1+N_2} x_{ij} \leq A;$$ entonces $B \leq A$.

$$\sum_{i+j \leq N} x_{ij} \leq \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq N} x_{ij} \leq B,$$ entonces $A \leq B$

Sabemos que para todo $N_1, N_2 \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} x_{ij} \leq B$$

y pasando al límite en $N_2$,

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N_1} \lim_{N_2 \to +\infty} \sum_{j=1}^{N_2} x_{ij}$$

$$= \lim_{N_2 \to +\infty} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} x_{ij} \leq B;$$ es decir $B_1 \leq B$.

Además,

$$\sum_{i \leq N_1} \sum_{j \leq N_2} x_{ij} \leq \sum_{i \leq N_1} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij} \right) \leq B_1$$ para todo $N_1$

y $B \leq B_1$. El caso $B = B_2$ es análogo.

Tma: Sea $x_{ij}$, como antes. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} x_{ij}$$

Dem: Recordar que cada suma infinita es el supremo de sus sumas parciales.