Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira 1. zatia

Azterketak 11 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira, 10 zati bakoitzean, eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira, gutxienez 3 puntu zati banan.

Lehenengo zatiaren iraupena: Ordu 1 eta erdi.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $\{a_n\}$ gai ez-negatiboen segida dela eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ jakinda:

a) Kalkulatu hurrengo segidaren limitea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{a_n}$$

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zenbaki-seriearen izaera.

(1.5 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\infty}{2} = \infty$$

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da egiaztatzen, eta $a_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$ zenbaki-seriearen izaera.

(1.5 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \Rightarrow a_n>0 \;\; \forall n \Rightarrow$ D´Alembert erabil daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{n!}{(n+1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)!}{(n+2)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}=1^{\infty}=l\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ll=\lim_{n\to\infty}(n+1)\mathrm{L}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\sim\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{n+1-n-2}{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-(n+1)}{n+2}=-1\Leftrightarrow l=e^{-1}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}\text{ konbergentea da.}$$

3.- a) Aurkitu $f(x) = \mathrm{L}(9+81x^2)$ funtzioaren berredura-seriezko garapena non den baliozkoa adieraziz.
b) Aurkitu, deribatu gabe, $f^{2n+1)}(0) \quad \forall n \geq 0$.

(2 puntu)

a) $f'(x) = \dfrac{2\cdot 81x}{9+81x^2} = \dfrac{18x}{1+9x^2} \overset{(*)}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 18x\cdot(-9x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2\cdot 9^{n+1}x^{2n+1}$

$$\forall x \,/\, \left|-9x^2\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(*) $r = -9x^2$ arrazoia duen serie geometrikoaren batura.

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean, $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2\cdot 9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{L}9 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$x = \pm\frac{1}{3}$ puntuetan:

$\exists f$ eta jarraitua da

eta

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^{n+1}\frac{1}{3^{2n+2}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ baldintzaz konbergentea da, beraz existitzen da batura jarraitua ere puntu horietan.

Orduan:

$$f(x) = \mathrm{L}9 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

b) Aurreko atalean lortutako berredura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea da, hau da:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Eta ikusten denez, garapen horretako gai guztiak berredura bikoitiak dira. Hortaz:

$$f^{2n+1)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

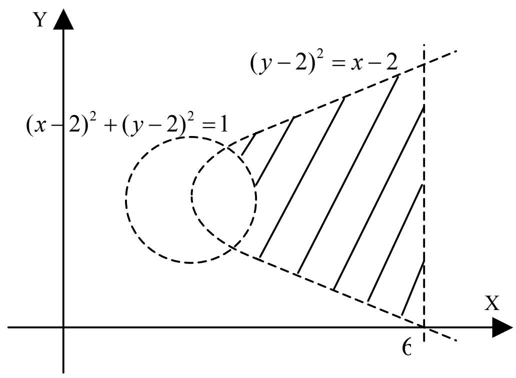
4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki honako funtzio honen definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(x^2+y^2-4x-4y+7)+\mathrm{L}(6-x)}{\sqrt{x-2-(y-2)^2}}$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-4x-4y+7>0,\ 6-x>0,\ x-2-(y-2)^2>0\right\}$$

$x^2+y^2-4x-4y+7>0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2>1$
$6-x>0 \Leftrightarrow x<6$
$x-2-(y-2)^2>0 \Leftrightarrow (y-2)^2<x-2$



5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{L}(1+xy)\cdot\dfrac{(y-x)}{\sin(x^2+y^2)} & \forall (x,y)\neq(0,0)\,/\,xy>-1 \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Estudiatu bere jarraitasuna $(0,0)$ puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

d) Estudiatu lehenengo deribatu partzialen jarraitasuna $(0,0)$ puntuan.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{L}(1+xy)\cdot\frac{(y-x)}{\sin(x^2+y^2)}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\mathrm{L}(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta)\cdot\frac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin(\rho^2)}\sim\lim_{\rho\to0^+}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)=0\quad\forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{L}(1)\cdot\dfrac{-h}{\sin(h^2)}}{h}\sim\lim_{h\to0}\frac{-\mathrm{L}(1)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h^2}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}(1)\cdot\dfrac{k}{\sin(k^2)}}{k}\sim\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}(1)}{k^2}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k^2}=0$$

c) *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\qquad\text{(B.B.N.)}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\mathrm{L}(1+hk)\cdot\dfrac{(k-h)}{\sin(h^2+k^2)}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\mathrm{L}(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta)\cdot\dfrac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin(\rho^2)}}{\rho}\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\dfrac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\rho^2}}{\rho}=$$

$$=\cos\theta\sin\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)\neq0\quad\forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

d) *f* diferentziagarria ez denez $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow f'_x$ eta f'_y ezin dira jarraituak izan $(0,0)$ puntuan (hauetako bat jarraitua balitz, orduan *f* diferentziagarria litzateke (B.N.)).

(1) Polarretan adieraziz.

6.- Migratzen ari direnean, enaren abiadura $f(x,y)=x^y+y^2$ funtzio diferentziagarriak ematen du. Zein da azelerazio maximoa $P(1,1)$ puntuan? Eta zein da azelerazioa puntu horretan iparralderantz doazenean? (OX ardatzak ekialdea erakusten badu).

(1.5 puntu)

Azelerazio maximoa $P(1,1)$ puntuan *f*-ren aldakuntza maximoa da, $\left|\vec{\nabla} f(P)\right|$ hain zuzen ere:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = y\cdot x^{y-1} \Rightarrow f'_x(1,1)=1 \\ f'_y = x^y\cdot \mathrm{L}x + 2y \Rightarrow f'_y(1,1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{\nabla} f(1,1)\right| = \sqrt{5}$$

Azelerazioa iparralderantz doazenean, berriz, deribatu direkzionala da $\vec{u}(0,1)$ bektore unitarioak adierazitako norabidean:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = f'_x(1,1)\cdot 0 + f'_y(1,1)\cdot 1 = 2$$

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira 2. zatia

Azterketak 11 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira, 10 zati bakoitzean, eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira, gutxienez 3 puntu zati banan.

Bigarren zatiaren iraupena: 2 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $F(x,y,z)=x^2-8x+(3x^2+1)(y^2z+1)+2e^z=0$ ekuazioa eta $P(a,0,0)$ puntua emanik:

a) Kalkulatu a parametroaren balioak zeinetarako aurreko ekuazioak x eta y aldagaiko z funtzio inplizitua, $z=z(x,y)$, definitzen duen P puntuaren ingurunean.

b) Aurkitu esandako $z=z(x,y)$ funtzioaren mutur erlatiboak non $z\neq 0$.

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i) $F(a,0,0)=a^2-8a+(3a^2+1)(0+1)+2e^0=4a^2-8a+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}=\frac{8\pm 4}{8}\Rightarrow a=\frac{3}{2} \text{ eta } a=\frac{1}{2}$$

ii)

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x-8+6x(y^2z+1)\\ F'_y &= 2yz(3x^2+1)\\ F'_z &= (3x^2+1)\cdot y^2+2e^z \end{aligned}\right\} \text{jarraituak } \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

iii) $F'_z(a,0,0)=2\neq 0$

Beraz, $P(a,0,0)$ puntuaren ingurunean $\exists z=z(x,y)$ deribatu partzial jarraituekin $z(a,0)=0$ delarik.

b) z funtzioak bete behar duen baldintza beharrezkoa mutur erlatiboak izateko:

$$\left\{\begin{aligned} z'_x=0 &\Leftrightarrow F'_x=0 \Leftrightarrow 2x-8+6x(y^2z+1)=0\\ z'_y=0 &\Leftrightarrow F'_y=0 \Leftrightarrow 2yz(3x^2+1)=0 \underset{z\neq 0}{\Rightarrow} y=0 \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad 2x-8+6x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$$

Eta hasierako ekuazioan balio hauek biak ordezkatuz:

$$1-8+(3+1)+2e^z=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^z=\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad z=\mathrm{L}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Beraz, puntu singular bakarra lortu dugu, $A(1,0,\mathrm{L}(3/2))$ ($z(1,0)=\mathrm{L}(3/2)$ izanik).

Puntu honetarako baldintza nahikoa aztertuko dugu:

$$d^2z = z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}(dy)^2$$

Puntu kritikoetan $z''_{x^2} = -\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z} \quad z''_{xy} = -\dfrac{F''_{xy}}{F'_z} \quad z''_{y^2} = -\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$, hortaz:

$$\left.\begin{array}{ll} F''_{x^2} = 2 + 6(y^2z+1) & \Rightarrow F''_{x^2}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 8 \\ F''_{y^2} = 2z(3x^2+1) & \Rightarrow F''_{y^2}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 8\mathrm{L}(3/2) \\ F''_{xy} = 12xyz & \Rightarrow F''_{xy}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 0 \\ F'_z = y^2\cdot(3x^2+1) + 2e^z & \Rightarrow F'_z(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2z(1,0) = -\frac{1}{3}\left(8(dx)^2 + 8\mathrm{L}(3/2)(dy)^2\right) < 0$$

Beraz, *A* maximo erlatiboa da.

2.- Estudiatu $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{(x-1)^2 \cdot \left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3} dx$ integralaren izaera.

(2 puntu)

$$I=\int_0^{\infty} f(x)dx \text{ non } f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{(x-1)^2 \cdot \left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3} \geq 0 \quad \forall x \in [0,\infty)$$

f definiturik ez dago $x=0$ eta $x=1$ puntuetan. Eten motak aztertuko ditugu:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{(x-1)^2 \cdot \left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3} \sim \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\left(x^{8/3}+1\right)^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(x^{8/3}+1\right)^3}=1$$

Beraz, eten gaindigarria dago $x=0$ puntuan.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}x}{(x-1)^2 \cdot \left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\frac{\pi/4}{0}=\infty$$

Beraz, jauzi infinituko eten gaindiezina, hortaz, $x=1$ puntu singularra da.

Integrala hiru zatitan banandu behar dugu:

$$I=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^a f(x)dx+\int_a^{\infty} f(x)dx=I_1+I_2+I_3 \qquad \text{non } 1<a<\infty$$

I_1 integralaren izaera aztertzeko integral eredua honako hau da:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^m}, \quad m>0, \begin{cases} \forall m<1 \text{ konbergentea} \\ \forall \mathrm{m} \geq 1 \text{ dibergentea} \end{cases}$$

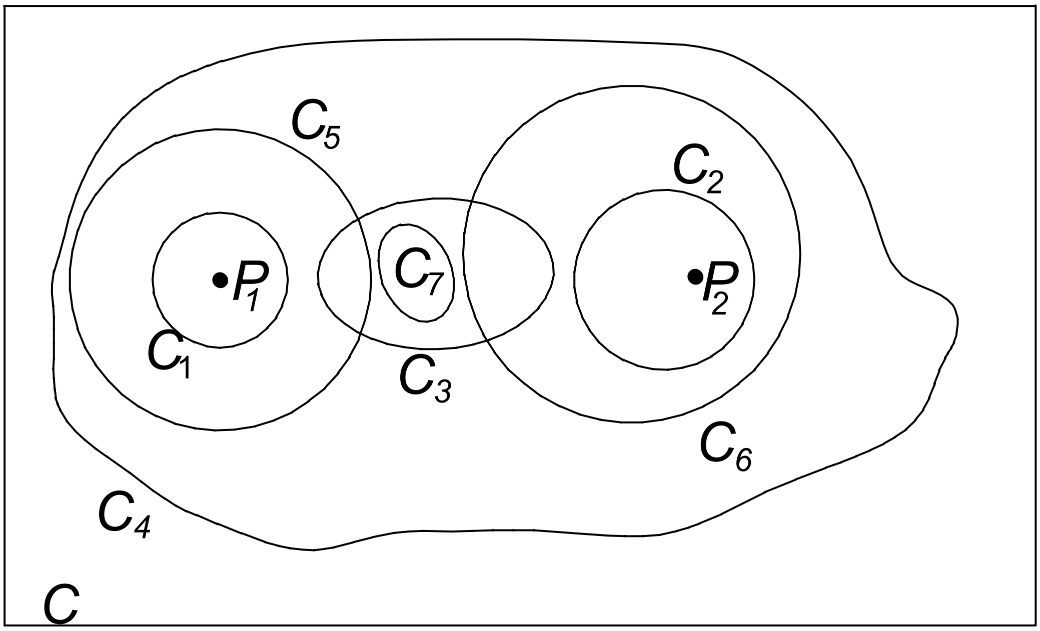
Eta konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{\frac{1}{(1-x)^m}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^m \cdot \operatorname{arctg}x}{(x-1)^2 \cdot \left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^3}=\frac{\pi/4}{2^3}\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^m}{(x-1)^2} \underset{(m=2>1)}{=} \frac{\pi}{2^5} \in (0,\infty)$$

Beraz, I_1 dibergentea da eta, ondorioz, baita *I* ere.

3.- Izan bedi $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ funtzio bektoriala, P, Q eta euren lehenengo deribatu partzialak jarraituak izanik eta $P'_y = Q'_x$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eremuan, non C kurba eta honek mugatzen duen eskualdea edukita dauden, P_1 eta P_2 puntuak izan ezik. Baldin $\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$ eta $\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 5$, kalkulatu:

a) $\oint_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, b) $\oint_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, c) $\oint_{C_5} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, d) $\oint_{C_6} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, e) $\oint_{C_7} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, f) $\oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



(1.5 puntu)

a) $\oint_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ (C_3 kurba itxi eta sinplea da, eremuaren zati sinpleki konexuan)

b) $\oint_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2+5=7$

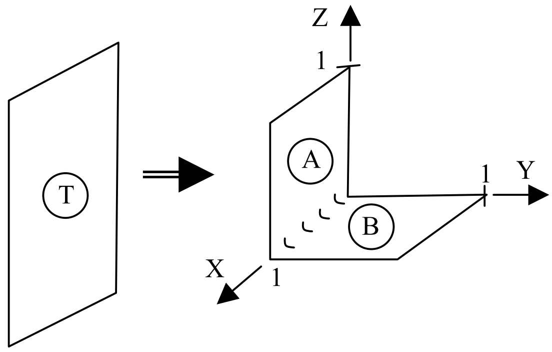
c) $\oint_{C_5} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$ (Bi kurbek puntu singular berdina inguratzen dute)

d) $\oint_{C_6} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 5$ (Aurreko kasuan bezala)

e) $\oint_{C_7} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ (a) kasuan bezala)

f) $\oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2+5=7$

4.- Izan bedi 1 eta 2 cm-ko aldeak dituen laukizuzena. Alde luzeenaren erditik 90º tolesten da ("L" osatuz). Kalkulatu $\vec{V} = xz \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} + (y-x) \cdot \vec{k}$ bektorearen zirkulazioa tolestutako laukizuzenaren perimetroan zehar. Zirkulazioaren noranzkoa ikasleak aukeratuko du.



(2 puntu)

T eskualdearen muga C kurba itxi eta sinplea da. Laukizuzena tolestu ondoren C zatika leuna da eta mugatzen duen gainazal itxi eta zati leunari S deituko diogu. Hau da, $S = A \cup B$. Orduan:

$$\oint_C \vec{V} d\vec{r} = \oint_C (xzdx + 7dy + (y-x)dz) \overset{(1)}{=} \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S} = \iint_A \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S} + \iint_B \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S}$$

(1) Stokes erabil daiteke.
Bi integral hauek kalkulatuko ditugu orain.

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = (1-0) \cdot \vec{i} + (x+1) \cdot \vec{j} + (0-0) \cdot \vec{k} = \vec{i} + (x+1) \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S} = \iint_S \left[dydz + (x+1)dzdx + 0dxdy\right]$$

Orduan:

$$A \equiv y = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow \iint_A \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S} = \iint_{R_{xz}} (x+1)dxdz = \int_0^1 \int_0^1 (x+1)dzdx = \int_0^1 (x+1)dx = \frac{3}{2}$$

$$B \equiv z = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow \iint_B \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) d\vec{S} = \iint_B 0 d\vec{S} = 0$$

Beraz, $\oint_C \vec{V} d\vec{r} = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$

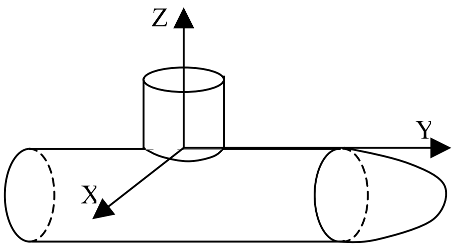
5.- Marrazkian erakusten den S itsaspekoa hurrengo gainazalek osatzen dute:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(z+2)^2=4 \\ y=-5 \\ x^2+(z+2)^2=9-y \\ z=1 \end{cases}$$

Jasotako erasoaren ondorioz $z=1$ gainazalak definituriko eskotila gabe geratu da.

a) Kalkulatu, <u>eraso horren ondoren</u>, $\vec{V}=3xy\cdot\vec{i}+7z\cdot\vec{j}-3yz\cdot\vec{k}$ bektorearen fluxua itsaspekoan zehar.

b) Kalkulatu itsaspekoaren paraboloidearen zatiaren azalera.



(2.5 puntu)

a) $\Phi_{S'}=\iint\limits_{S'}\vec{V}d\vec{S}=\iint\limits_{S'}(3xydydz+7zdzdx-3yzdxdy)$

non S' irekia den (itsaspekoa eskotila, $z=1$ estalkia, gabe)

Honela, $S=S'\cup S_1$ non $S_1\equiv z=1$, itxia da. Beraz:

$$\Phi_S=\Phi_{S'}+\Phi_{S_1}\underset{Gauss}{=}\iiint\limits_V div\left(\vec{V}\right)dxdydz=\iiint\limits_V(3y+0-3y)dxdydz=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Phi_{S'}=-\Phi_{S_1}=\iint\limits_{S_1}(3xydydz+7zdzdx-3yzdxdy)\overset{(1)}{=}-\iint\limits_{R_{xy}}-3ydxdy$$

(1) $S_1\equiv z=1\Rightarrow dz=0$

$R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 1$, polarretan adierazita: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}\Rightarrow J=\rho, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 1$

$$\Phi_{S'}=-\Phi_{S_1}=3\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2\sin\theta d\rho d\theta=0\quad\Leftrightarrow\quad\Phi_{S'}=0$$

b) Azalera $=\iint\limits_{R_{xz}}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz$

non $y=9-x^2-(z+2)^2\Rightarrow\begin{cases} y'_x=-2x \\ y'_z=-2(z+2) \end{cases}$ eta $R_{xz}\equiv x^2+(z+2)^2\le 4$

Polarretan adierazita: $\begin{cases} z=-2+\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \end{cases}\Rightarrow J=\rho, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2$

$$\text{Azalera}=\int_0^{2\pi}\int_0^2\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho d\theta=2\pi\left[\frac{1}{8}\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2=\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-1\right)=\frac{17\sqrt{17}-1}{6}\pi$$