Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Guztira

Lehenengo partzialak 7 ariketa ditu eta puntuen batura 15 da. Azterketa gainditzeko 7,5 puntu lortzea ezinbestekoa da.

1go partzialaren iraupena: Ordubete eta erdi.

IZENA ETA ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo segiden limiteak:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{10}{n}\right)}{\mathrm{L}(7n^2+8n)}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left[(n+4)!\right]}{\mathrm{L}(n!)}$

(2 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{10}{n}\right)}{\mathrm{L}(7n^2+8n)}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(10)-\mathrm{L}(n)}{\mathrm{L}(n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(10)}{2\mathrm{L}(n)}-\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n)}{2\mathrm{L}(n)}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left[(n+4)!\right]}{\mathrm{L}(n!)}\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left[(n+4)!\right]-\mathrm{L}\left[(n+3)!\right]}{\mathrm{L}(n!)-\mathrm{L}\left[(n-1)!\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n+4)}{\mathrm{L}(n)}=1$$

(*) $\left\{\mathrm{L}(n!)\right\}$ segida gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz aplika daiteke.

2.- Estudiatu ondorengo seriearen izaera eta kalkulatu bere batura konbergentea den kasuetan:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{L}a\right)^n, \quad a>0 \quad \text{izanik.}$$

(2 puntu)

Serie geometrikoa da, $r=\mathrm{L}a$ arrazoikoa. Hortaz:

Konbergentea da (absolutuki) $\Leftrightarrow \quad |r|=|\mathrm{L}a|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<\mathrm{L}a<1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e}<a<e$

($\forall a \geq e$ eta $\forall a \leq \frac{1}{e}$ ez da konbergentea).

Bere batura:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{L}a\right)^n=\frac{\mathrm{L}a}{1-\mathrm{L}a} \qquad \forall a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

3.- Adierazi **arrazoituz** honako baieztapenak egiazkoak edo gezurrak diren, $\alpha > 0$ eta $b > 1$ direla kontuan hartuta:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^\alpha} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b^{1/x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}x}{x^\alpha} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \infty$

(1 puntu)

a) $x^\alpha \ll b^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^\alpha} = \infty \quad \Rightarrow$ Zuzena da.

b) $\dfrac{1}{x} = t \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b^{1/x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{b^t}{t^\alpha} = \infty \quad \Rightarrow$ Zuzena da.

c) $\mathrm{L}x \ll x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}x}{x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$ Ez da zuzena

d) $\dfrac{1}{x} = t \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}t}{t^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$ Ez da zuzena.

4.- $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}|x|}{x^2}$ funtzioa emanik:

a) Aurkitu *f*-ren asintotak.
b) Estudiatu funtzioaren gorakortasuna, beherakortasuna eta mutur erlatiboak.
c) Aztertu *f*-ren ahurtasuna, konbexutasuna eta kalkulatu inflexio-puntuak.
d) Egin funtzioaren irudikapen grafiko hurbildua.

(3 puntu)

a) $D=\mathbb{R}-\{0\}$ eta $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}|x|}{x^2}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}(x)}{x^2} & \forall x>0\\[2mm] \dfrac{\mathrm{L}(-x)}{x^2} & \forall x<0\end{cases}$.

$f(-x)=f(x)$, beraz OY ardatzarekiko simetrikoa da.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty \quad\Rightarrow\quad x=0$ asintota bertikala da.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ asintota horizontala da. Eta ez dago asintota zeiharrik.

b) Funtzioa simetrikoa dela eta, ikasketa $(0,\infty)$ tartean besterik ez dugu egingo.

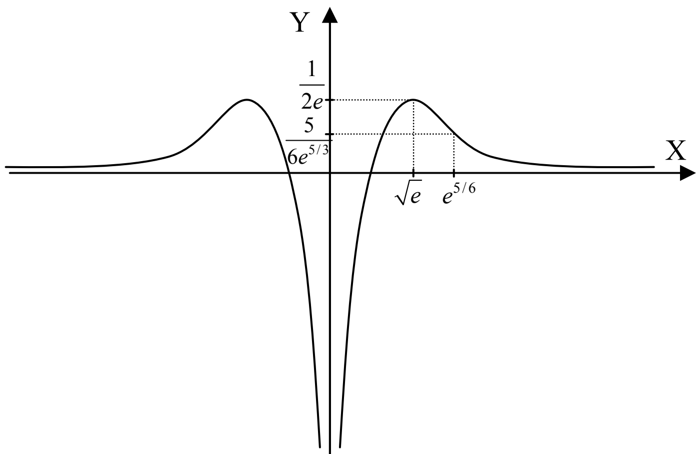
$$\forall x>0 \quad f'(x)=\frac{1-2\cdot \mathrm{L}x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=e^{1/2} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\left(0,e^{1/2}\right) & f'(x)>0\Rightarrow f \text{ gorakorra da}\\ \forall x\in\left(e^{1/2},\infty\right) & f'(x)<0\Rightarrow f \text{ beherakorra da}\end{cases}$$

Beraz, $\left(e^{1/2},\dfrac{1}{2e}\right)$ maximo erlatiboa da.

$$\text{c) } \forall x>0 \quad f''(x)=\frac{-5+6\cdot \mathrm{L}x}{x^4}=0 \Leftrightarrow x=e^{5/6} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\left(0,e^{5/6}\right) & f''(x)>0\Rightarrow f\ \cup\\ \forall x\in\left(e^{5/6},\infty\right) & f''(x)<0\Rightarrow f\ \cap\end{cases}$$

Beraz, $\left(e^{5/6},\dfrac{5}{6e^{5/3}}\right)$ inflexio-puntua da.

d)



5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{\sqrt{x^2+y^2-2x}}{\sqrt{x^2+y^2+2x}}$$

(2 puntu)

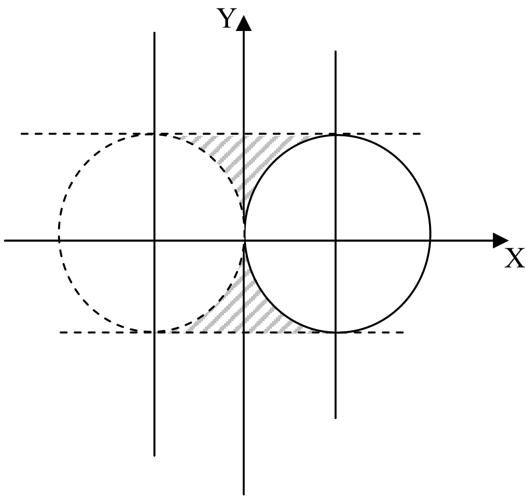
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1-x^2\geq 0, 1-y^2>0, x^2+y^2-2x\geq 0, x^2+y^2+2x>0\right\}$$

$1-x^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -1\leq x\leq 1$

$1-y^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad -1<y<1$

$x^2+y^2-2x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2+y^2\geq 1$

$x^2+y^2+2x>0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+y^2>1$



6.- Hurrengo funtzioa emanik

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cdot e^y}{x^2+y^2} & \text{baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Estudiatu *f*-ren jarraitasuna $\mathbb{R}^2$ planoan.
b) Kalkulatu *f*-ren lehenengo ordenako deribatu partzialak $\mathbb{R}^2$ planoan.
c) Aztertu *f*-ren lehenengo ordenako diferentziagarritasuna $\mathbb{R}^2$-n.

(3 puntu)

a) $\forall (x,y)\neq(0,0)$ *f* jarraitua da.
$f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3\cdot e^y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta\cdot e^{\rho\sin\theta}}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\cdot\cos^3\theta\cdot e^{\rho\sin\theta}=0$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $\forall (x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x(x,y)=\frac{(x^4+3x^2y^2)\cdot e^y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2-2y)\cdot x^3e^y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k}=0$$

c) $\forall (x,y)\neq(0,0)$ *f* diferentziagarria da.
(0,0) puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^3\cdot e^k}{h^2+k^2}-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h^3\cdot(e^k-1)-hk^2\right|}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\left|\rho^3\cdot\cos^3\theta\cdot\left(e^{\rho\sin\theta}-1\right)-\rho^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right|}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\left|\cos^3\theta\cdot\left(e^{\rho\sin\theta}-1\right)-\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right|=\sin^2\theta\cdot\left|\cos\theta\right|\neq 0$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

7.-Suposa dezagun ondorengo φ funtzioa $(1,1,1)$ puntuan diferentziagarria dela:

$$\varphi(x,y,z) = f(xyz, g(xy,xz))$$

non $g(1,1)=1$ eta $\left(\vec{\nabla} f\right)_{(1,1)} = \left(\vec{\nabla} g\right)_{(1,1)} = (0,1)$ diren.

Kalkulatu φ-ren deribatu direkzional maximoa.

(2 puntu)

$$\begin{array}{l} x\nwarrow \qquad\qquad \nearrow u \\ y \leftarrow \varphi = f \qquad\quad v \\ z\swarrow \qquad\qquad \searrow g\langle \\ \qquad\qquad\qquad\quad w \end{array} \qquad\qquad \text{non} \begin{cases} u = xyz \\ v = xy \\ w = xz \end{cases}$$

$$\varphi'_x = f'_u \cdot yz + f'_g \cdot \left(g'_v \cdot y + g'_w \cdot z\right)$$
$$\varphi'_y = f'_u \cdot xz + f'_g \cdot g'_v \cdot x$$
$$\varphi'_z = f'_u \cdot xy + f'_g \cdot g'_w \cdot x$$

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{(1,1)} = \left(\vec{\nabla} g\right)_{(1,1)} = (0,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_u(1,1) = g'_v(1,1) = 0 \\ f'_g(1,1) = g'_w(1,1) = 1 \end{cases}$$

Orduan,

$$\varphi'_x(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot \left(g'_v(1,1) + g'_w(1,1)\right) = 1$$
$$\varphi'_y(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot g'_v(1,1) = 0$$
$$\varphi'_z(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot g'_w(1,1) = 1$$

Orduan, $\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{(1,1,1)} = (1,0,1)$, eta $\left|\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{(1,1,1)}\right| = \sqrt{2}$, deribatu direkzional maximoa hain zuzen ere.

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira

Bigarren partzialak 6 ariketa ditu eta puntuen batura 15 da. Azterketa gainditzeko 7,5 puntu lortzea ezinbestekoa da.

Azterketaren iraupena: Ordubete eta hiru laurden.

IZENA ETA ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aztertu ea hurrengo sistemak:

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ xyu^3 + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

$P(x,y,z,u,v)$=(1,1,1,1,1) puntuaren ingurune batean x, y eta z aldagaiko u eta v funtzio inplizituak definitzen dituen. Gero kalkulatu $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ puntu horretan.

(2 puntu)

i) $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = xyu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(P) = 0 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

ii) P puntuaren ingurune batean existitzen eta jarraituak dira deribatu partzialak:

$F'_x = y^2 + zu \quad F'_y = 2xy + v^2 \quad F'_z = xu \quad F'_u = xz \quad F'_v = 2yv$

$G'_x = yu^3 + 2v \quad G'_y = xu^3 \quad G'_z = 0 \quad G'_u = 3xyu^2 - 2uv^2 \quad G'_v = 2x - 2u^2v$

iii) $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurune batean existitzen dira $u = u(x,y,z)$ eta $v = v(x,y,z)$ diferentziagarriak, non $u(1,1,1) = 1$ eta $v(1,1,1) = 1$.

Orain, sisteman x-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$$\left.\begin{cases} 2 + u'_x + 2v'_x = 0 \\ 3 + u'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u'_x = -3} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \boxed{v'_x = \frac{1}{2}}$$

Eta, era beran, y-rekiko:

$$\left.\begin{cases} 3 + u'_y + 2v'_y = 0 \\ 1 + u'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u'_y = -1} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \boxed{v'_y = -1}$$

2.- Izan bedi $f(x,y) = x^m + y^m \quad (m \in \mathbb{N} - \{1\})$. Aurkitu funtzio honen mutur erlatiboak $x + y = 2$ baldintzarekin.

(2 puntu)

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y) = x^m + y^m + \lambda(x + y - 2)$$

Baldintza beharrezkoa:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{cases} w'_x = m \cdot x^{m-1} + \lambda = 0 \\ w'_y = m \cdot y^{m-1} + \lambda = 0 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow x^{m-1} = y^{m-1} \Rightarrow \begin{cases} y = x \ (m \text{ bikoitia}) \\ y = \pm x \ (m \text{ bakoitia}) \end{cases} \\ \hfill x + y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = x \Rightarrow x = y = 1 \\ y = -x \Rightarrow 0 = 2 \end{cases}$$

Beraz, puntu kritiko bakarra, $A(1,1)$ puntua da.

Baldintza nahikoa:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} w''_{x^2} = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \\ w''_{y^2} = m \cdot (m-1) \cdot y^{m-2} \quad \Rightarrow \quad d^2 w(1,1) = m \cdot (m-1) \cdot \left((dx)^2 + (dy)^2 \right) \\ w''_{xy} = 0 \end{cases} \\ \qquad \text{Eta} \quad x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad dx + dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy = -dx \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 w(1,1) > 0$$

Orduan, $A(1,1)$ minimo erlatibo baldintzatua da.

3.- Estudiatu honako integral inpropioaren izaera: $\int_0^1 (\mathrm{L}x)^2\, dx$.

(1,5 puntu)

$\int_0^1 f(x)dx$:

$f(x) = (\mathrm{L}x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \left(0,1\right]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singular bakarra da.

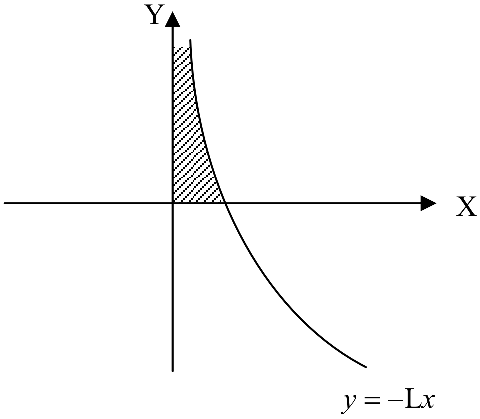
Integral eredua: $\int_0^1 \frac{dx}{x^m}, \quad m > 0, \begin{cases} \text{konbergentea } \forall m < 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathrm{L}x)^2}{\frac{1}{x^m}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot \mathrm{L}x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-m}{x^{m+1}}} = -\frac{2}{m} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{L}x}{\frac{1}{x^m}} \overset{L'H}{=} -\frac{2}{m} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-m}{x^{m+1}}} = \frac{2}{m^2} \lim_{x\to 0^+} x^m = 0 \quad \forall m > 0$$

Beraz, baita $\forall m \in (0,1)$ ere $\Rightarrow$ $\int_0^1 (\mathrm{L}x)^2\, dx$ konbergentea da (integral eredua bezala).

4.- Kalkulatu OX ardatzak, OY ardatzak ($y \geq 0$) eta $y = -\mathrm{L}x$ kurbak definitzen duten bornegabeko eskualdeak sortuko duen biraketa-bolumena OX ardatzaren inguruan biratzean.

(2 puntu)



Eskualde honek sortutako biraketa-bolumena hurrengo integralak ematen digu:

$$B = \pi \int_0^1 (-\mathrm{L}x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (\mathrm{L}x)^2 \, dx$$

Aurreko ariketako integral inpropioa hain zuzen ere. Ikusi dugunez, konbergentea da.
Zatikako integrazioa erabiliz:

$$u = (\mathrm{L}x)^2 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2 \cdot \mathrm{L}x}{x} dx$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$B = \pi \int_0^1 (\mathrm{L}x)^2 \, dx = \pi \left[x \cdot (\mathrm{L}x)^2 \Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{L}x dx \right] \overset{(*)}{=} -2\pi \int_0^1 \mathrm{L}x dx =$$

Berriro zatikako integrazioa aplikatuz:

$$u = \mathrm{L}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$= -2\pi \left[x \cdot \mathrm{L}x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \right] \overset{(*)}{=} 2\pi$$

(*) Oharra: $\lim_{x \to 0^+} x \cdot (\mathrm{L}x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathrm{L}x$

5.- Burutu ondoko integral parametrikoa: $I=\int_0^{\infty} L\left(\frac{x^2+p^2}{x^2+q^2}\right)dx$.

(2 puntu)

I integrala *p* parametroarekiko deribatuz:

$$I'_p=\int_0^{\infty}\frac{\frac{2p}{x^2+q^2}}{\frac{x^2+p^2}{x^2+q^2}}dx=\int_0^{\infty}\frac{2p}{x^2+p^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{2p}{p^2\cdot\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)}dx=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}=2\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{p}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\pi$$

Emaitza hau *p* parametroarekiko integratuz:

$$I=\int \pi dp=\pi p+k$$

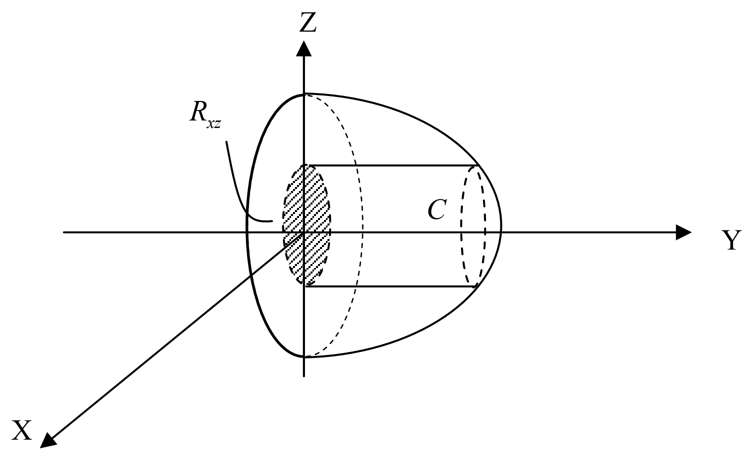
Baldin $p=q \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I=\int_0^{\infty} L(1)\,dx=0 \\ I=\pi q+k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k=-\pi q \quad \Rightarrow \quad I=\pi(p-q)$

6.- Demagun $\begin{cases} S_1 \equiv 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \\ S_2 \equiv 4x^2 + 4z^2 = 3 \end{cases}$, ($y \geq 0$ izanik) gainazalok mugatzen duten V bolumena

a) Zehaztu V solidoaren bolumena.
b) Planteatu beharrezko integrala V solidoak mugatzen duen S_1-en azalera kalkulatzeko.
c) Balioetsi $\oint_C \left(z\,dx + \dfrac{x^2}{2} dy + yz\,dz \right)$ lerro-integrala, S_1-en eta S_2-ren arteko C ebakidura-kurban zehar.
d) Izan bedi S, S_1-ek eta S_2-k osatzen duten gainazal itxia ($y \geq 0$ izanik). Kalkulatu $\iint_S \left(z\,dydz - \dfrac{x^2}{2} dxdz + z\,dxdy \right)$ gainazal-integrala , S-ren kanpoko aurpegitik.

(5,5 puntu)

a) $\begin{cases} y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \equiv y = \sqrt{4 - 4x^2 - 4z^2} \\ S_2 \equiv x^2 + z^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$



Zilindrikoetan: $\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \\ y = y \end{cases} \quad J = \rho \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - 4\rho^2}$

$$\text{Beraz, } V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{\sqrt{4-4\rho^2}} \rho\,dy\,d\rho\,d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rho\sqrt{4 - 4\rho^2}\,d\rho = 2\pi \frac{(4 - 4\rho^2)^{3/2}}{3/2} \left(-\frac{1}{8} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}(1 - 8) = \frac{7\pi}{6}$$

b) $\text{Azalera}\left(S_1\right)=\iint\limits_{R_{xz}}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz$

non $\begin{cases} y=\sqrt{4-4x^2-4z^2} \Rightarrow \begin{cases} y'_x=\dfrac{-4x}{\sqrt{4-4x^2-4z^2}} \\ y'_z=\dfrac{-4z}{\sqrt{4-4x^2-4z^2}} \end{cases} \Rightarrow 1+(y'_x)^2+(y'_z)^2=\dfrac{4+12x^2+12z^2}{4-4x^2-4z^2} \\ R_{xz}\equiv x^2+z^2\le\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Orduan: $\text{Azalera}\left(S_1\right)=\iint\limits_{R_{xz}}\sqrt{\dfrac{4+12(x^2+z^2)}{4-4(x^2+z^2)}}\,dxdz$.

Eta <u>polarretan</u> planteatuz gero: $\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad J=\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Azalera}\left(S_1\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\rho\sqrt{\frac{4+12\rho^2}{4-4\rho^2}}\,d\rho d\theta$$

c) $\oint\limits_C\left(z\,dx+\dfrac{x^2}{2}dy+yz\,dz\right)$ bi eratan kalkula daiteke:

(i) Zuzenean lerro-integrala kalkulatuko dugu, C kurba parametrizatuz:

$$C=S_1\cap S_2\equiv\begin{cases} S_1\equiv 4x^2+y^2+4z^2=4 \\ S_2\equiv 4x^2+4z^2=3 \end{cases}\equiv\begin{cases} y=1 \\ x^2+z^2=\dfrac{3}{4} \end{cases}\equiv\begin{cases} z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t \\ y=1\Rightarrow dy=0 \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\oint\limits_C\left(z\,dx+\frac{x^2}{2}dy+yz\,dz\right)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\cos^2 t-\frac{3}{4}\cos t\cdot\sin t\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt-\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\cos t\cdot\sin t\,dt}_{=0}=$$

$$=\frac{3}{8}\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}$$

(ii) C kurba itxia denez, Stokes aplika daiteke:

$$\oint\limits_C\left(z\,dx+\frac{x^2}{2}dy+yz\,dz\right)=\oint\limits_C\vec{F}d\vec{r}\underset{STOKES}{=}\iint\limits_S\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}=\iint\limits_S(zdydz+dzdx+xdxdy)=$$

non $S\equiv y=1 \quad\Rightarrow\quad dy=0$

$$= \iint_{R_{xz}} dzdx = \text{Azalera}\left(R_{xz}\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad (\, R_{xz} \equiv x^2 + z^2 \leq \frac{3}{4} \text{ baita})$$

d) $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \left(z\,dydz - \frac{x^2}{2} dxdz + z\,dxdy \right) = \iiint_V div\left(z, -\frac{x^2}{2}, z \right) dxdydz = \iiint_V dxdydz \overset{(*)}{=} \frac{7\pi}{6}$$

(*) a) ataleko bolumena da.