1.ZATIA

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua

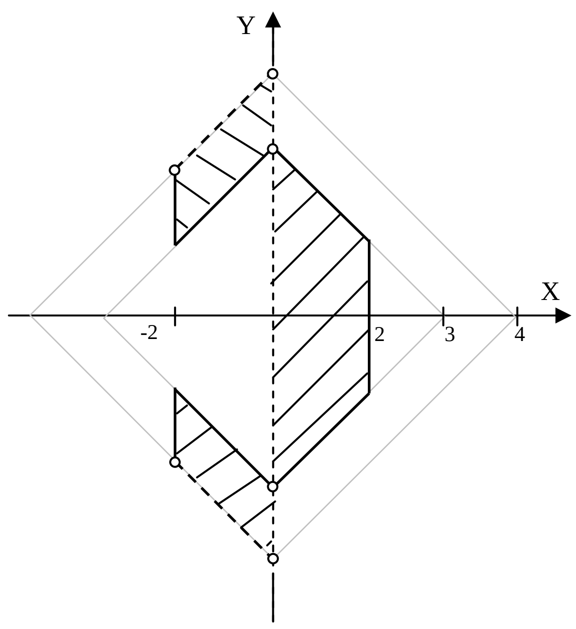
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x\cdot \mathrm{L}(4-|x|-|y|)}}{\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\cdot \mathrm{L}(4-|x|-|y|)\ge 0,\ 4-|x|-|y|>0,\ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\ne 0,\ -1\le\frac{x}{2}\le 1\right\}$$

- $-1\le\dfrac{x}{2}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le x\le 2$
- $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\ne 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{2}\ne 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ne 0$
- $4-|x|-|y|>0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|+|y|<4$
- $x\cdot \mathrm{L}(4-|x|-|y|)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \ \wedge\ \mathrm{L}(4-|x|-|y|)\ge 0 \ \Leftrightarrow\ x\ge 0 \ \wedge\ 4-|x|-|y|\ge 1 \\ \text{edo} \\ x\le 0 \ \wedge\ \mathrm{L}(4-|x|-|y|)\le 0 \ \Leftrightarrow\ x\le 0 \ \wedge\ 4-|x|-|y|\le 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \ \wedge\ |x|+|y|\le 3 \\ \text{edo} \\ x\le 0 \ \wedge\ |x|+|y|\ge 3 \end{cases}$$



2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ **.**

(1,5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = (1^\infty) = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{L}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \sim$$

$$\sim \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = e^{1/2}$$

3.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}}{c^n \cdot n!}$ seriearen izaera *a*, *b* eta *c* parametro errealen balioen arabera, $c > 0$ izanik.

(3 puntu)

$a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}}{c^n \cdot n!} \geq 0 \quad \forall n$. D´Alembert-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^a} \cdot (n+1)^{b\cdot(n+1)}}{c^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{c^n \cdot n!}{\sqrt{n^a} \cdot n^{b\cdot n}} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^a}}{\sqrt{n^a}} \cdot \frac{(n+1)^{b\cdot(n+1)} \cdot n!}{n^{b\cdot n} \cdot (n+1) \cdot n!} =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{b\cdot(n+1)}}{n^{b\cdot n} \cdot (n+1)} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{b\cdot n} \cdot \frac{(n+1)^b}{(n+1)} = \frac{e^b}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1)^{b-1} =$$

$$\begin{cases} \frac{e^b}{c} \cdot \infty = \infty > 1 \quad \forall b > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \frac{e^b}{c} \cdot 0 = 0 < 1 \quad \forall b < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \frac{e}{c} \qquad \text{baldin } b = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Baldin } c > e \Rightarrow \frac{e}{c} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \text{Baldin } c < e \Rightarrow \frac{e}{c} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \text{Baldin } c = e \Rightarrow \frac{e}{c} = 1 \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot n!} \quad \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot n!} \overset{(*)}{\sim} \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{(1-a)/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Baldin } \frac{1-a}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \text{Baldin } \frac{1-a}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \end{cases}$$

(*) Stirling-en formula aplikatuz.

4.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{|x|}}}{\mathrm{L}|x-1|} & \text{baldin } x\neq 1\\ 0 & \text{baldin } x=1\end{cases}$. **Estudiatu** f **funtzioaren jarraitutasuna (eten mota adieraziz), deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna** $x=0$ **eta** $x=1$ **puntuetan.**

(2,5 puntu)

Jarraitutasuna:

$x=0$ puntuan:

$\nexists f$

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{\infty}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{\infty}{0^+}=+\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{Jauzi infinituko eten gaindiezina}$$

$x=1$ puntuan:

$f(1)=0$

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(x-1)}=\dfrac{e}{-\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{e}{-\infty}=0\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{Jarraitua da}$$

Diferentziagarritasuna:

$x=0$ puntuan ez da jarraitua, beraz ezin da deribagarria izan.

$x=1$ puntuan:

$$\left.\begin{cases}f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(h)}\overset{(*)}{=}-\infty\\ f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(-h)}\overset{(*)}{=}\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{Ez da deibagarria.}$$

Diferentziagarritasuna:

$x=0$ eta $x=1$ puntuetan deribagarria ez denez, ezin da diferentziagarria izan.

$$(*)\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(h)}=e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1/h}{\mathrm{L}(h)}\overset{(L'H)}{=}e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-1/h^2}{1/h}=-e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h}=-\infty\\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(-h)}=e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1/h}{\mathrm{L}(-h)}\overset{(L'H)}{=}e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1/h^2}{1/h}=-e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{h}=\infty\end{cases}$$

5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} & \text{baldin} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$**.**

a) Aztertu *f* funtzioa diferentziagarria ote den (0,0) puntuan.
b) Baldin $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioa bada, *f* funtzioaren deribatu direkzionala (0,0) puntuan $\vec{u}$ bektorearen norabidean $h_1\cdot f'_x(0,0)+h_2\cdot f'_y(0,0)$ adierazpenak emango du? Arrazoitu erantzuna.
b) Aurkitu *f* -ren deribatu direkzionala (0,0) puntuan $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.

(3 puntu)

a) Diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoa deribatu partzial finituak edukitzea da:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k}=0$$

Orain baldintza beharrezkoa eta nahiko erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^3}=\varphi(\theta)\neq0 \quad \Rightarrow \text{ ez da diferentziagarria.}$$

b) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan $\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}\neq h_1\cdot f'_x(0,0)+h_2\cdot f'_y(0,0)$

c) (0,0) puntuko deribatu direkzionala kalkulatzeko definizioa erabili behar da:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{\lambda^3\cdot h_1^2\cdot h_2}{\lambda^2}}{\lambda}=h_1^2\cdot h_2 \quad \forall\vec{u}=(h_1,h_2) \text{ unitario.}$$

Orduan, $\vec{u}=(1,1)$ unitario bihurtuko dugu: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

eta $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

2.ZATIA

1.- a) Estudiatu ea $F(x,y,z)=2z+xyz^2-xy-x^2-y^2+2=0$ ekuazioak $z=z(x,y)$ funtzioa definitzen duen $P(x,y,z)=(0,0,-1)$ puntuaren ingurune batean.
b) Aztertu $z=z(x,y)$ funtzioak muturrik ote duen $Q(x,y)=(0,0)$ puntuan eta baiezko kasuan sailkatu.

(2,5 puntu)

a) i) $F(P)=-2+2=0$

ii) $F'_x = yz^2-y-2x$

$F'_y = xz^2-x-2y$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$

$F'_z = 2+2xyz$

iii) $F'_z(P)=2\neq 0$

Orduan, $\exists z=z(x,y)$ diferentziagarria $P(x,y,z)=(0,0,-1)$ puntuaren ingurune batean eta $z(0,0)=1$.

b) $Q(x,y)=(0,0)$ puntuan muturra izateko baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} z'_x(0,0)=0 \iff F'_x(P)=0 \\ z'_y(0,0)=0 \iff F'_y(P)=0 \end{cases} \quad \text{Egiaztatzen da.}$$

Muturra sailkatzeko bigarren diferentzialaren zeinua aztertuko dugu:

$$d^2z(0,0)=-\frac{1}{F'_z(P)}\cdot\left(F''_{x^2}(P)(dx)^2+F''_{xy}(P)dxdy+F''_{y^2}(P)(dy)^2\right)$$

$F''_{x^2}=-2$, $F''_{xy}=z^2-1 \Rightarrow F''_{xy}(P)=0$, $F''_{y^2}=-2$

$$\Rightarrow \quad d^2z(0,0)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-2(dx)^2-2(dy)^2\right)>0 \quad \Rightarrow \text{ minimoa da.}$$

2.- Estudiatu $I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x-\cos x}$ **integral inpropioaren izaera.**

(1,5 puntu)

$$I=\int_0^{\pi} f(x)dx \qquad \text{non } \; f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}\begin{cases} <0 & \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right) \\ >0 & \forall x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right] \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\pm\infty \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}$ puntu singularra da.

$$I=\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi/4} f(x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi} f(x)dx=I_1+I_2$$

I_1 integralaren izaera aztertzeko erabiliko dugun integral eredua:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\left(\pi/4-x\right)^m} \quad (m>0) \; \left\langle \begin{array}{l}\text{konbergentea } \forall m<1 \\ \text{dibergentea } \forall m\geq 1\end{array}\right.$$

Eta konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-f(x)}{\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^m}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^m}{\cos x-\sin x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-m\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^{m-1}}{-\sin x-\cos x}\overset{(m=1)}{=}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0,1)$$

Baldin $m=1$ integral eredua dibergentea da, beraz I_1 dibergentea da. Orduan I dibergentea da.

3.- Izan bitez $\vec{F}(x,y,z) = 2x\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ **,** $\vec{G}(x,y,z) = 2x\cdot\vec{i} + yz\cdot\vec{j} + (x+z)\cdot\vec{k}$ **eta** $\vec{H}(x,y,z)$ **3 eremu bektorial.**

Adierazi, arrazoituz, hurrengo baieztapenak zuzenak ote diren:

a) $\vec{F}$ **-ren integralak 6 balio du** $A(0,0,0)$ **puntutik** $B(2,1,2)$ **puntura doan edozein kurbatan zehar.**

b) $\vec{G}$ **-ren zirkulazioa nulua da edozein kurba itxi eta sinpletan zehar.**

c) **Baldin** $\vec{H}$ **-ren zirkulazioa** $C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ **kurban zehar 0 bada, orduan** $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{0}$**.**

(3 puntu)

a) $\vec{F}$ eta bere deribatu partzialak jarraituak dira eta $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = (1-1)\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = \vec{0}$ $\mathbb{R}^3$ eremu sinpleki konexuan $\Rightarrow$ $\int \vec{F}d\vec{r}$ bidearekiko independentea da $\Leftrightarrow$ funtzio potentziala existitzen da: $U(x,y,z) = x^2 + yz + k$ $\Rightarrow$ $\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = U(B) - U(A) = 6$. Beraz, zuzena da.

b) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{G}\right) = (0-y)\cdot\vec{i} + (0-1)\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\int \vec{G}d\vec{r}$ ez da bidearekiko independentea, beraz ezin da ziurtatu $\oint_C \vec{G}d\vec{r} = 0$ $\forall C$ itxi eta sinple. Hortaz, ez da zuzena.

c) $C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ kurba itxi eta sinplea bada ere, kurba bat besterik ez da, orduan $\oint_{C_1} \vec{H}d\vec{r} = 0 \;\;\not\Rightarrow\;\; \overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{0}$. Beraz, ez da zuzena.

4.- Izan bedi hurrengo gainazalek mugaturiko *V* solidoa:

$$\begin{cases} S_1 \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases} \textbf{, non } b>a>0 \textbf{ eta } y\geq 0\,\textbf{.}$$

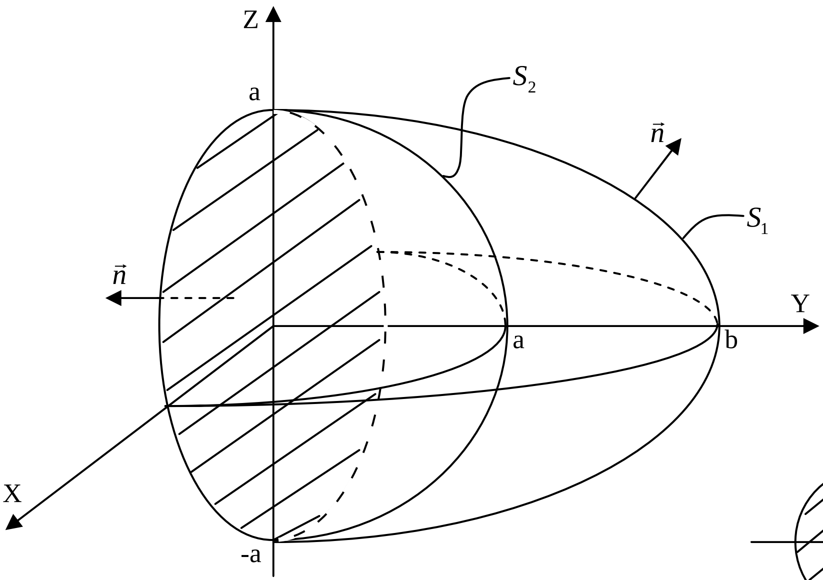
a) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.

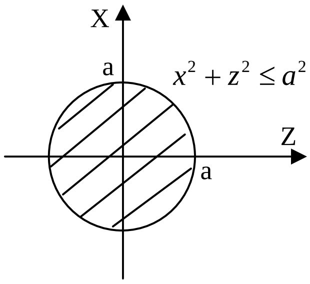
b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z)=z\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}-x\cdot\vec{k}$ **bektorearen zirkulazioa** S_1 eta S_2 **gainazalen arteko *C* ebakidura-kurban zehar.**

c) Kalkulatu *V* solidoaren mugako S_1 **zatitik irtengo den** $\vec{F}$ **bektorearen fluxua.**

(5 puntu)

a) Bolumena XZ planoan proiektatuz, $x^2+z^2\leq a^2$ eskualdeko puntuetarako $y_{esfera}\leq y\leq y_{elipsoidea}$ mugak lortuko ditugu, non $\begin{cases} y_{esfera}=\sqrt{a^2-x^2-z^2} \\ y_{elipsoidea}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-z^2} \end{cases}$





Zilindrikoetan adieraziz:

$$\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \quad |J|=\rho \quad 0\leq\theta\leq 2\pi \quad 0\leq\rho\leq a \quad \sqrt{a^2-\rho^2}\leq y\leq \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2} \\ y=y \end{cases}$$

$$\text{Bolumena}=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\sqrt{a^2-\rho^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,dy\,d\rho\,d\theta=2\pi\left(\frac{b}{a}-1\right)\int_0^a\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=\frac{2\pi(b-1)}{a}\left.\frac{(a^2-\rho^2)^{3/2}}{-3}\right|_0^a=$$

$$=\frac{2\pi(b-1)a^3}{3a}=\frac{2\pi(b-1)a^2}{3}$$

b) $\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \oint_C \left(zdx + x^2dy - xdz \right)$ kalkulatu behar dugu.

C kurba parametrizatuz:

$$C = S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = a\cos t \\ x = a\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot a\cos t - a\sin t \cdot (-a\sin t))dt = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)dt = 2\pi a^2$$

Baita Stokes-en teorema erabiliz ere egin daiteke:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} d\vec{S} = \iint_S ((0-0)dydz + (1+1)dzdx + (2x-0)dxdy) =$$

$$= \iint_S (0dydz + 2dzdx + 2xdxdy) \overset{(*)}{=} \iint_{R_{xz}} 2dxdz = 2 \cdot \text{Azalera}\left(R_{xz}\right) = 2\pi a^2$$

(*) $S \equiv y = 0$ eta $R_{xz} \equiv x^2 + z^2 \le a^2$

c) $\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} (zdydz + x^2dzdx - xdxdy)$ kalkulatu behar dugu.

Baina $div\left(\vec{F}\right) = 0$ denez, $S_4 = S_1 \cup S_3$ non $S_3 \equiv y = 0$, gainazal itxi definituko dugu eta gainazal horretatik irtengo den fluxua kalkulatuko dugu, Gauss-en teorema erabiliz:

$$\Phi_{S_4} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_3} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_3}$$

Eta $\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} (zdydz + x^2dzdx - xdxdy) \underset{(\beta=\pi)}{\overset{(S_3 \equiv y=0 \Rightarrow dy=0)}{=}} -\iint_{R_{xz}} x^2dzdx \overset{(*)}{=}$

(*) Polarretan:

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \left|J\right| = \rho \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le a$$

$$\overset{(*)}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho \cdot \rho^2 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta = -\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = -\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{a^4}{8}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{2\pi a^4}{8} = -\frac{\pi a^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_1} = \frac{\pi a^4}{4}$$