Azterketak bi zati ditu, partzial biei dagozkienak. Lehenengo zatiak 5 ariketa ditu, eta 10 puntu balio du. Bigarren zatiak 4 ariketa ditu eta 10 puntu balio du. Zati biak egin behar dituztenek 10 puntu atera behar dute azterketa gainditzeko.

1. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

LEHENENGO ZATIA

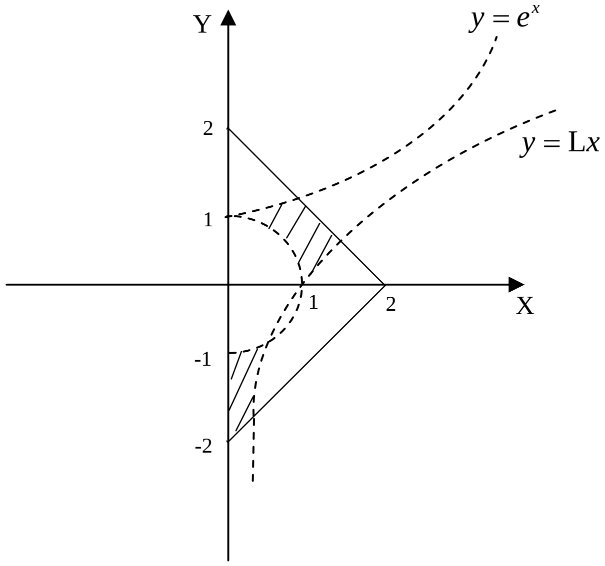
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua

$$f(x,y)=\mathrm{L}\left(y-\mathrm{L}x\right)+\frac{\arcsin\left(|x|+|y|-1\right)}{\sqrt{e^x-y}\cdot\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0,\, y-\mathrm{L}x>0, -1\le|x|+|y|-1\le 1, e^x-y>0, x^2+y^2-1>0\right\}$$

- $x>0$
- $\left.\begin{array}{lll} y-\mathrm{L}x>0 & \Leftrightarrow & y>\mathrm{L}x \\ e^x-y>0 & \Leftrightarrow & y<e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{L}x<y<e^x$
- $-1\le|x|+|y|-1\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|+|y|\le 2$
- $x^2+y^2-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2>1$



2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\frac{7}{3n^2+2}}$ **.**

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\frac{7}{3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(n!\right)^{\frac{7}{3n^3+2n}} = \infty^0 = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{3n^3+2n}\cdot \mathrm{L}\left(n!\right) \sim \frac{7}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(n!\right)}{n^3} =$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{7}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(n!\right)-\mathrm{L}\left((n-1)!\right)}{n^3-(n-1)^3} = \frac{7}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{n!}{(n-1)!}\right)}{n^3-(n^3-3n^2+3n-1)} = \frac{7}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n)}{3n^2-3n+1} \sim$$

$$\sim \frac{7}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n)}{n^2} \underset{\mathrm{L}(n)\ll n^2}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^0 = 1$$

(*) Stolz aplikatuz, $\left\{n^3\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea baita.

3.-Izan bedi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ **seriea.**

a) Konbergentea da? Arrazoitu erantzuna.

b) Absolutuki konbergentea da? Arrazoitu erantzuna.

(1.5 puntu)

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n} = \frac{(-1)^n}{2\cdot \mathrm{L}n} \quad \forall n \geq 2 \quad \Rightarrow$ Serie alternatua da.

Balio absolutuen seriea aztertzen hasten bagara:

$$\left.\begin{array}{l} |a_n| = \dfrac{1}{2\cdot \mathrm{L}n} > \dfrac{1}{2n} \quad \forall n \geq 2 \\ \text{Eta } \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ dibergentea da} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \text{ dibergentea da} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n \text{ ez da absolutuki konbergentea.}$$

Alternatua denez, Leibniz-en teorema aplikatuko diogu orain:

$$\left.\begin{array}{l} i) \quad \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0 \\ ii) \quad |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da}$$

Beraz:

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ ez da absolutuki konbergentea

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ konbergentea da. Hau da, baldintzaz konbergentea da.

4.- $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ **funtzioa emanik,**

a) Irudikatu *f*, gutxi gorabehera, aldez aurretik bere definizio-eremua, asintotak eta gorakortasuna - beherakortasuna estudiatuz.

b) Garatu *f* berretura-serietan, bere konbergentzi arloa adieraziz.

c) Kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^{n-1}}$ **seriearen batura.**

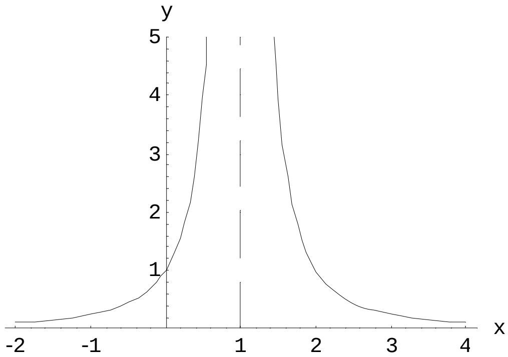
(2.5 puntu)

a) $D=\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1$ asintota bertikala da

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ asintota horizontala da. Beraz, ez dago asintota zeiharrik.

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\quad \forall x\in D \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\forall x<1 \quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ gorakorra da}\\ \forall x>1 \quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ beherakorra da}\end{cases}$$



b) Bi eratan:

b.1) Izan bedi $g(x)=\dfrac{1}{1-x}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) $r=x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura, konbergentea, beraz, $\forall x \,/\, |r|=|x|<1$

Eta deribagarria da $\forall x\in(-1,1)$:

$$g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}\quad \forall x\in(-1,1)$$

Baldin $x=1 \quad\Rightarrow\quad \nexists f$

Baldin $x=-1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\exists f\\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n \quad \text{ez da konbergentea}\end{cases}$

Orduan $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

b.2) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) Newton-en binomioaren garapena.

Oharra: $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^{n-1}} \overset{(**)}{=} f\left(\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^2}=\dfrac{100}{81}$

(**) b) atalean ikusi dugunez, $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2-xy} & \text{baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **.**

a) Estudiatu bere definizio-eremua, jarraitutasuna (0,0) puntuan eta kalkulatu deribatu partzialak (0,0) puntuan.
b) Azaldu diferentziagarria denentz (0,0) puntuan.
c) Lortu *f*-ren gradientea *P*(2,-1) puntuan eta baita puntu honetatik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea ere.

(3 puntu)

a) *Definizio-eremua*:

$$x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{y}{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x.y)=(0,0)$$

Baina $f(0,0)=0$

Beraz, $D=\mathbb{R}^2$

Jarraitutasuna (0,0) *puntuan*:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2-xy}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2-\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\frac{\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{1-\cos\theta\cdot\sin\theta}\overset{(*)}{=}0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

Beraz, f jarraitua da (0,0) puntuan.

(*) $1-\cos\theta\cdot\sin\theta\neq0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$

Deribatu partzialak (0,0) *puntuan*:

$$f_x'(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0$$

b) (0,0) puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f_x'(0,0)-k\cdot f_y'(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{h^2k}{h^2+k^2-hk}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^2\theta\cdot|\sin\theta|}{\rho^2(1-\cos\theta\cdot\sin\theta)\cdot\rho}=\varphi(\theta)\neq0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$$

Beraz, f ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

c) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ f diferentziagarria denez, orduan:

$$\overrightarrow{\nabla f}(2,-1) = f'_x(2,-1)\cdot\vec{i} + f'_y(2,-1)\cdot\vec{j}$$

$$\forall(x,y)\neq(0,0) \quad f'_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2-xy)-x^2y(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(2,-1) = -\frac{8}{49}$$

$$\forall(x,y)\neq(0,0) \quad f'_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2-xy)-x^2y(2y-x)}{(x^2+y^2-xy)^2} \quad \Rightarrow \quad f'_y(2,-1) = \frac{12}{49}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f}(2,-1) = -\frac{8}{49}\cdot\vec{i} + \frac{12}{49}\cdot\vec{j} = \left(-\frac{8}{49},\frac{12}{49}\right)$$

P puntutik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea eta puntu horretako gradientea elkarzutak direla kontuan izanik, orduan

Bektore ukitzailea: $\left(-\frac{12}{49},-\frac{8}{49}\right)\perp\left(-\frac{8}{49},\frac{12}{49}\right) = \overrightarrow{\nabla f}(2,-1)$

Zuzen ukitzailea: $\dfrac{x-2}{-\frac{12}{49}} = \dfrac{y+1}{-\frac{8}{49}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-2}{12} = \dfrac{y+1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{7}{3}$

2. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

BIGARREN ZATIA

1.- Izan bedi $F(x,y,z)=\int_0^{x+2y^2+z}\frac{z^2}{1+t^4}\,dt$ **diferentziagarria.**

a) Estudiatu ea $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua definitzen duen** $P(-1,0,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Egiaztatu ea $z=z(x,y)$ **funtzioak mutur erlatiboa duen (-1,0) puntuan.**

(2 puntu)

a) Froga dezagun $F(x,y,z)=0$ ekuazioak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duela:

i. $F(P)=\int_0^0\frac{dt}{1+t^4}=0$

ii. $F'_x(x,y,z)=\frac{z^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$

$F'_y(x,y,z)=\frac{4yz^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$, jarraituak *P*-ren ingurunean.

$F'_z(x,y,z)=\int_0^{x+2y^2+z}\frac{2z}{1+t^4}\,dt+\frac{z^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$

iii. $F'_z(P)=\int_0^0\frac{2}{1+t^4}\,dt+\frac{1}{1+0}=1\neq 0$

Beraz, *P*-ren ingurunean $\exists!\, z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(-1,0)=1$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioak mutur erlatiboa edukitzeko (-1,0) puntuan baldintza beharrezkoa bete behar du:

$$\begin{cases} z'_x(-1,0)=-\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=0 \\ z'_y(-1,0)=-\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(P)=0 \\ F'_y(P)=0 \end{cases}$$

Eta $F'_x(P)=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$

Beraz, (-1,0) puntuan ez dago mutur erlatiborik.

2.- Estudiatu $\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{L}x}\,dx$ integralaren konbergentzia.

(1.5 puntu)

$$I = \int_0^\infty f(x)\,dx \quad \text{non} \quad f(x) = \frac{x}{\mathrm{L}x}\begin{cases} < 0 & \forall x \in (0,1) \\ > 0 & \forall x \in (1,\infty) \end{cases}$$

- ∞ puntu singularra da, beraz I integral inpropioa da.
- Gainera, $\nexists f(0)$ baina, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0 \Rightarrow x = 0$ puntuan eten gaindigarria dago (ez da puntu singularra).
- Eta $\nexists f(1)$ eta $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ puntu singularra da

Orduan integrala honela deskonposatuko dugu:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{non } 1 < a < \infty$$

I_1 integral inpropioaren izaera aztertzen hasten bagara:

Integral eredua $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^m}$, $m > 0 \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m < 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \geq 1 \end{array}\right.$

Eta konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-f(x)}{\frac{1}{(1-x)^m}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\cdot(1-x)^m}{\mathrm{L}x} \sim \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\cdot(1-x)^m}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^m}{(1-x)} \underset{(m=1)}{=} 1 \in (0,\infty)$$

Beraz, I_1 dibergentea da $\Rightarrow$ I dibergentea da.

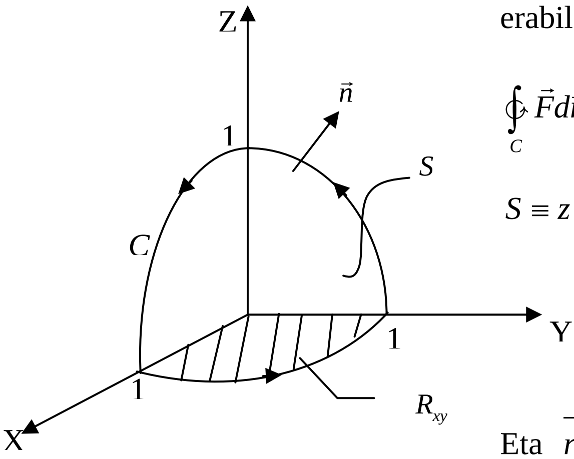
<u>Beste modu batera</u>:

I_3 integral inpropioaren izaera aztertzen hasten bagara, eta konbergentzi baldintza beharrezkoa aplikatzen badiogu:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \underset{(\mathrm{L}x \ll x)}{=} \infty \neq 0 \Rightarrow I_3 \text{ dibergentea da} \Rightarrow I \text{ dibergentea da}$$

3.- Izan bitez $\vec{F}(x,y,z)=x^2\cdot\vec{i}+2xy\cdot\vec{j}+\sqrt{z}\cdot\vec{k}$ eremu bektoriala eta lehenengo oktantean plano koordenatuen eta $x^2+y^2+z^2=1$ esferaren arteko ebakidurak definituriko *C* kurba itxia. Kalkulatu $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ lerro-integrala.

(2.5 puntu)



C itxia (eta zatika leuna) denez, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\,d\vec{S} \qquad \text{non}$$

$$S\equiv z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0 \quad y\ge 0\end{cases}$$

Eta $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}=(0-0)\cdot\vec{i}+(0-0)\cdot\vec{j}+(2y-0)\cdot\vec{k}$

Orduan, $\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\pm\iint_{R_{xy}}2y\,dxdy\overset{(*)}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 2\rho^2\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta=\frac{2}{3}\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

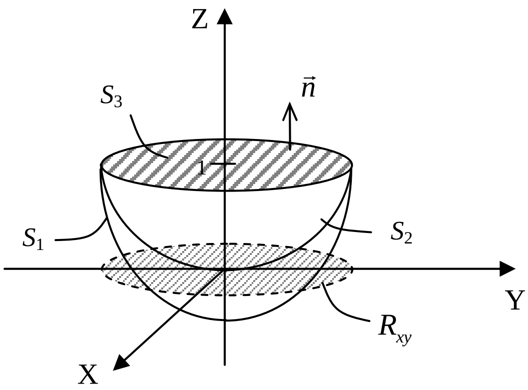
(*) $\begin{cases}\gamma<\dfrac{\pi}{2}\\ \text{Eta polarretan }\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho \quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \quad 0\le\rho\le 1\end{cases}$

4.- Izan bitez $\vec{F}(x,y,z)=(\cos y+\sin z)\cdot\vec{i}+(e^x+z)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ bektorea eta hurrengo gainazalek mugaturiko V solidoa:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=1+3z \\ S_2 \equiv x^2+y^2=4z \end{cases}.$$

a) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.
b) Aurkitu *V* -ren mugatik irtengo den $\vec{F}$ -ren fluxua.
c) Aurkitu $\vec{F}$ -ren fluxua *V* mugatzen duen S_1 gainazalaren zatian zehar.

(4 puntu)



$$S_1 \cap S_2 \quad \Rightarrow \quad 1+3z=4z \quad \Leftrightarrow \quad z=1$$

$$\Rightarrow \quad R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4$$

a) Bolumena kalkulatzeko koordenatu zilindrikoak erabiliko ditugu:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le 2 \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \frac{\rho^2-1}{3}\le z\le\frac{\rho^2}{4}$$

$$\textbf{(*)} \quad \begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=1+3z \\ S_2 \equiv x^2+y^2=4z \end{cases} \overset{\text{Zilindrikoetan}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} S_1 \equiv \rho^2=1+3z \\ S_2 \equiv \rho^2=4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 \equiv z=\dfrac{\rho^2-1}{3} \\ S_2 \equiv z=\dfrac{\rho^2}{4} \end{cases}$$

Orduan,

$$\text{Bolumena}(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{\rho^2-1}{3}}^{\frac{\rho^2}{4}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^2\rho\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^2-1}{3}\right)d\rho=2\pi\int_0^2\left(\frac{\rho^3}{4}-\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho}{3}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{\rho^4}{16}-\frac{\rho^4}{12}+\frac{\rho^2}{6}\right)_0^2=2\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

b) Izan bedi *S* gainazal itxia *V*-ren muga. Hau da $S\equiv S_1\cup S_2$ eta, itxia denez, Gauss-en teorema aplika daiteke:

$$\Phi_S = \iint_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dx\, dy\, dz = 0$$

c) $\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{F}\, d\vec{S}$ baina, $S \equiv S_1 \bigcup S_2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} \overset{(b)}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_2}$

Era berean, baldin $S_3 \equiv z = 1$ gainazala aukeratzen badugu eta definitzen badugu $S' \equiv S_1 \bigcup S_3$ gainazal itxia, orduan:

$$\Phi_{S'} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_3} \overset{div\left(\vec{F}\right)=0}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_3}$$

Eta $\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{F}\, d\vec{S} \overset{(*)}{=} \iint_{R_{xy}} x\, dx\, dy \overset{(**)}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{S_1} = 0$

(*) $S_3 \equiv z = 1 \quad \Rightarrow \quad dz = 0 \quad (\vec{n} = (0,0,1))$

(**) x funtzio bakoitia da eta $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 4$ simetrikoa da $0Y$ ardatzarekiko.