Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	1. zatia

Azterketak bi zati ditu, partzial biei dagozkienak. Lehenengo zatiak 6 ariketa ditu, eta 10 puntu balio du. Bigarren zatiak 5 ariketa ditu eta 10 puntu balio du. Zati biak egin behar dituztenek 10 puntu atera behar dute azterketa gainditzeko.

1. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 45 minutu

LEHENENGO ZATIA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$ **, non** $a\in\mathbb{R}$ **.**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{1+2+3+\ldots\ldots+n}$

(1.5 puntu)

a) Baldin $a=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$

Baldin $a\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=1^\infty=A \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}A=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\mathrm{L}\left(1-\frac{a}{n}\right)\sim$

$$\sim\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{a}{n}\right)=-a \quad\Leftrightarrow\quad A=e^{-a}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{1+2+3+\ldots\ldots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}1+\mathrm{L}2+\mathrm{L}3+\ldots+\mathrm{L}n}{1+2+3+\ldots\ldots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\overset{(*)}{=}$

(*) $\{b_n\}=\{1+2+3+\ldots\ldots+n\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea, orduan Stolz erabil daiteke.

$$\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}n}{n}\overset{(\mathrm{L}n\ll n)}{=}0$$

2.- Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]$**.**

a) Arrazoitu ea serie alternatua den.

b) Estudiatu seriearen izaera.

(1.5 puntu)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]=\frac{2}{1^2+1}+\frac{0}{2^2-1}+\frac{2}{3^2+1}+\frac{0}{4^2-1}+\frac{2}{5^2+1}+\frac{0}{6^2-1}+\ldots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Eta $a_n=\frac{2}{(2n-1)^2+1}>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Beraz ez da serie alternatua, gai ez-negatiboen seriea baizik.

b) Konparaziozko irizpidea erabiliz:

$$a_n=\frac{2}{(2n-1)^2+1}\sim\frac{2}{(2n-1)^2}\sim\frac{2}{(2n)^2}=\frac{1}{4n^2}$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konbergentea da. Orduan $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]$ konbergentea da.

3.- Kalkulatu $b \in \mathbb{R}$ hurrengo berdintza egia izan dadin:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}}$$

(1.5 puntu)

Limite biak kalkulatuko ditugu:

- $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \overset{(1)}{=} 1^{\pm\infty} = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \cdot \mathrm{L}x \sim \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \cdot (x-1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^{-1}$

- Baldin $b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^0 = 1$

$\forall b \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} \overset{(2)}{=} 1^{\pm\infty} = B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x^2} \cdot \mathrm{L}(\cos x) \sim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x^2} \cdot (\cos x - 1) \sim$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{b}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right) = -\frac{b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B = e^{-\frac{b}{2}}$$

Beraz, $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{-\infty}$ eta $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{\infty}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} = \begin{cases} 1^{\infty} & \forall b > 0 \\ 1^{-\infty} & \forall b < 0 \end{cases}$

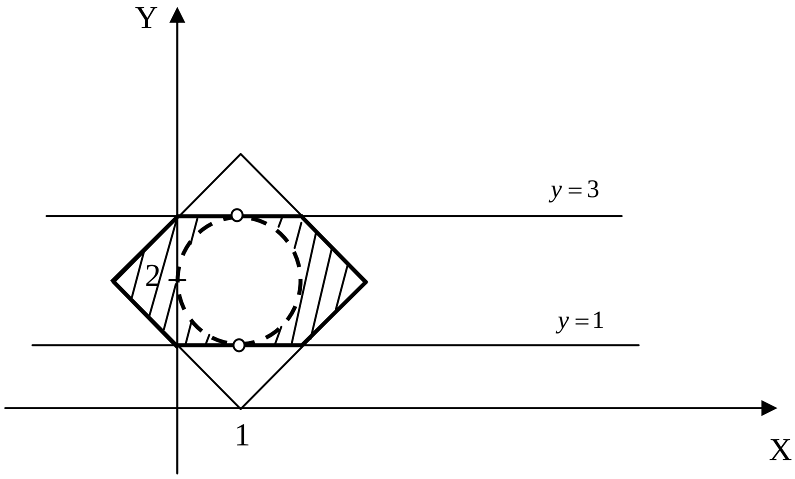
4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\arcsin(y-2)+\sqrt{2-|x-1|-|y-2|}\cdot \mathrm{L}\left((x-1)^2+(y-2)^2-1\right)$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le y-2\le 1,\, 2-|x-1|-|y-2|\ge 0,\, (x-1)^2+(y-2)^2-1>0\right\}$$

- $-1\le y-2\le 1 \iff 1\le y\le 3$
- $2-|x-1|-|y-2|\ge 0 \iff |x-1|+|y-2|\le 2$
- $(x-1)^2+(y-2)^2-1>0 \iff (x-1)^2+(y-2)^2>1$



5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot\sin x}{x^2+y^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **.**

a) Estudiatu *f*-ren jarraitutasuna (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu *f*-ren deribatu partzialak (0,0) puntuan.
b) Aztertu *f* diferentziagarria ote den (0,0) puntuan.

(2 puntu)

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot\sin x}{x^2+y^2}\overset{\text{(polarretan)}}{=}\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\cos\theta\cdot\sin(\rho\cos\theta)}{\rho^2}\sim$$

$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\cos\theta}{\rho^2}=\cos^2\theta\neq0=f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f_x'(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\frac{h\cdot\sin h}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h^2}\sim\lim_{h\to0}\dfrac{h}{h^2}=\pm\infty$

$$f_y'(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

6.- Izan bedi (x, y) puntuan tenperatura neurtzen duen $T(x, y) = e^{f(u,v)}$ funtzio diferentziagarria, non $u = e^{-x-y}$ eta $v = x^2 + y^2$ diren. Baldin $f(1,0) = 0$ eta $f'_u(1,0) = f'_v(1,0) = 2$ badira:

a) Kalkulatu (0,0) puntuan, norabidea non tenperaturaren aldakuntza maximoa den.

b) Aurkitu (0,0) puntutik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa.

(2 puntu)

a) (0,0) puntuan tenperaturaren aldakuntza maximoa $\overrightarrow{\nabla T}(0,0) = T'_x(0,0) \cdot \vec{i} + T'_y(0,0) \cdot \vec{j}$ bektoreak ematen digu.

$$T(x, y) = e^{f(u,v)} \quad \text{non} \quad f \langle \begin{matrix} u \langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ v \langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \end{matrix} .$$

Eta $(x, y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (u = e^{-x-y}, v = x^2 + y^2) = (1,0)$

Orduan:

$$T'_x = e^f \cdot \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \right) = e^f \cdot \left(-e^{-x-y} \cdot f'_u + 2x \cdot f'_v \right) \quad \Rightarrow \quad T'_x(0,0) = -2$$

$$T'_y = e^f \cdot \left(f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \right) = e^f \cdot \left(-e^{-x-y} \cdot f'_u + 2y \cdot f'_v \right) \quad \Rightarrow \quad T'_y(0,0) = -2$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla T}(0,0) = (-2,-2)$ ($y = x$ zuzenaren norabidea alegia).

b) Maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea $\perp \overrightarrow{\nabla T} \quad \Rightarrow \quad (2,-2)$ bektore ukitzailea da.

Eta (0,0) puntuko zuzen ukitzailea: $\begin{cases} y = -x \\ T(0,0) = 1 \text{ planoan} \end{cases}$.

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	2. zatia

Azterketak bi zati ditu, partzial biei dagozkienak. Lehenengo zatiak 6 ariketa ditu, eta 10 puntu balio du. Bigarren zatiak 5 ariketa ditu eta 10 puntu balio du. Zati biak egin behar dituztenek 10 puntu atera behar dute azterketa gainditzeko.

2. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 30 minutu

BIGARREN ZATIA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $\begin{cases} F(x,y,t) = t^3 + e^{x+t} + ay = 0 \\ G(x,y,t) = t - bx - \sin(yt) = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik:**

a) **Estudiatu ea aurreko sistemak $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ funtzio inplizituak definitzen dituen $(x,y,t) = (0,-1,0)$ puntuaren ingurune batean.**

b) **Aztertu ea $h(t) = x(t) + y(t) + t$ funtzioak puntu kritikoa daukan $t = 0$ puntuan.**

(2 puntu)

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,t) = t^3 + e^{x+t} + ay = 0 \\ G(x,y,t) = t - bx - \sin(yt) = 0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,t) = (0,-1,0)$ puntuan:

i. $\begin{cases} F(P) = 1 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x = e^{x+t} & F'_y = a = 1 & F'_t = 3t^2 + e^{x+t} \\ G'_x = -b & G'_y = -t\cos(yt) & G'_t = 1 - y\cos(yt) \end{cases}$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_x(P) & F'_y(P) \\ G'_x(P) & G'_y(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab = b \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \neq 0$

Beraz, baldin $a = 1$ eta $b \neq 0$, $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ diferentziagarriak existitzen dira, non $x(0) = 0$ eta $y(0) = -1$.

b) $h(t)=x(t)+y(t)+t$ funtzioak puntu kritikoa dauka $t=0$ puntuan $\Leftrightarrow$ $h'(0)=x'(0)+y'(0)+1=0$.

Sisteman t-rekiko deribatuz eta $P(x,y,t)=(0,-1,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 3t^2+\left(x'+1\right)e^{x+t}+y'=0 \\ 1-bx'-\left(y'\cdot t+y\right)\cos(yt)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0)+1+y'(0)=0 \\ 1-bx'(0)+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x'(0)=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow \quad y'(0)=-1-\frac{2}{b}$$

Orduan $h'(0)=x'(0)+y'(0)+1=\dfrac{2}{b}-1-\dfrac{2}{b}+1=0$

2.- Estudiatu $\int_0^\infty \frac{(x^2+1)\cdot\arctan x}{x+x^4}dx$ integralaren konbergentzia, zein puntutan daukan singulartasunak adieraziz.

(1.5 puntu)

$$I=\int_0^\infty f(x)dx \quad \text{non} \quad f(x)=\frac{(x^2+1)\cdot\arctan x}{x+x^4}\geq 0 \quad \forall x\in(0,\infty)$$

$\nexists f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x^2+1)\cdot\arctan x}{x+x^4}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x^2+1)\cdot\arctan x}{x(1+x^3)}\sim\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \quad \Rightarrow$ Eten gaindigarria dago.

Beraz, I integral inpropioa da, ∞ puntu singular bakarra delarik.

$$I=\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^\infty f(x)dx=I_1+I_2 \quad 0<a<\infty$$

I_1 Riemann-en integrala delarik.

I_2 integral inpropioa aztertzeko konparaziozko irizpidea erabiliko dugu, integral eredua

$$I=\int_a^\infty \frac{dx}{x^m} \quad (a>0)\begin{cases}\forall m>1 \text{ konbergentea}\\ \forall m\leq 1 \text{ dibergentea}\end{cases} \text{ izanik.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^m\cdot(x^2+1)\cdot\arctan x}{x+x^4}\sim\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+2}}{x^4}\underset{(m=2>1)}{=}\frac{\pi}{2}\in(0,\infty) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_2 \text{ konbergentea da} \quad \Rightarrow \quad I \text{ konbergentea da.}$$

3.- $F(t)=\int_t^{2t}(x+t)\cdot e^{x^2}dx$ **funtzioa emanik, egiaztatu ea** $t=0$ **puntuan mutur erlatiborik duen, eta sailkatu.**

(1.5 puntu)

$t=0$ puntuan mutur erlatiborik egoteko baldintza beharrezkoa: $F'(0)=0$

$$F'(t)=\int_t^{2t}e^{x^2}dx+2(2t+t)\cdot e^{(2t)^2}-(t+t)\cdot e^{t^2}=\int_t^{2t}e^{x^2}dx+6t\cdot e^{4t^2}-2t\cdot e^{t^2} \quad\Rightarrow\quad F'(0)=0$$

Eta sailkatzeko baldintza nahikoa egiaztatuko dugu:

$$F''(t)=2e^{(2t)^2}-e^{t^2}+6e^{4t^2}+48t^2\cdot e^{4t^2}-2e^{t^2}-4t^2\cdot e^{t^2} \quad\Rightarrow\quad F''(0)=2-1+6-2=5>0 \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $t=0$ minimo erlatiboa da.

4.- a) Kalkulatu hurrengo bi gainazalen artean mugaturiko V solidoaren bolumena:

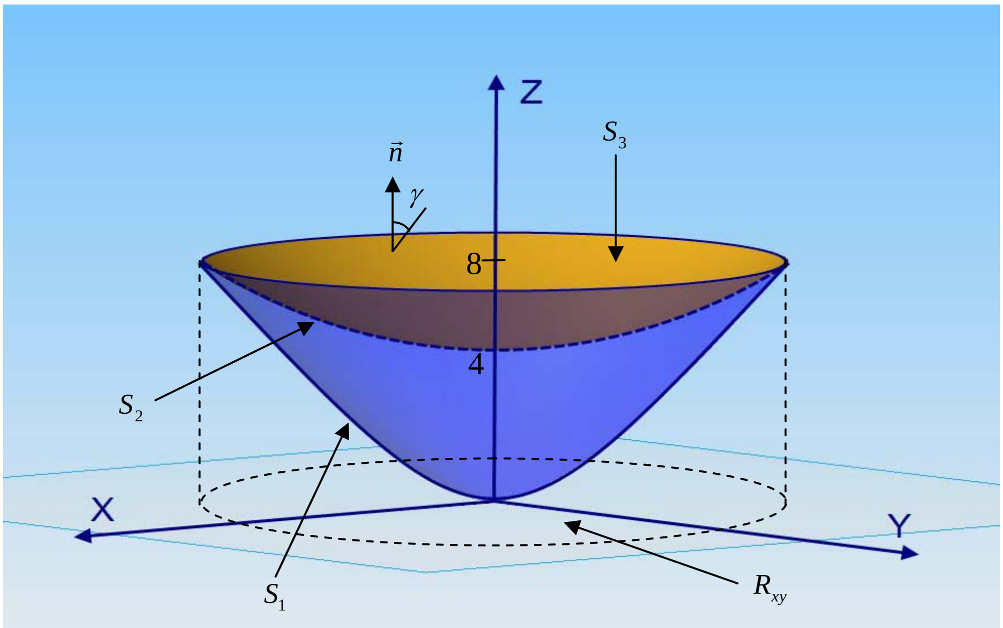
$$\begin{cases} S_1 \equiv z = 2(x^2+y^2) \\ S_2 \equiv z = 4+x^2+y^2 \end{cases}$$

b) Kalkulatu V solidoaren muga osatzen duten gainazal bakoitzetik irteten den $\vec{F}(x,y,z) = x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} - (2x+2y)z \cdot \vec{k}$ funtzio bektorialaren fluxua.

c) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren zirkulazioa gainazal bien arteko ebakidura-kurban zehar.

(3.5 puntu)

a)



$$\begin{cases} S_1 \equiv z = 2(x^2+y^2) \\ S_2 \equiv z = 4+x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad z = 2(z-4) \quad \Leftrightarrow \quad z = 8 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 8 \end{cases}$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \\ 2\rho^2 \le z \le 4+\rho^2 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$Bolumena(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2\rho^2}^{4+\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^2 \rho\left(4-\rho^2\right)d\rho = 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)_0^2 = 8\pi$$

b) Izan bedi V solidoaren muga $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia. Orduan S gainazaletik irteten den fluxua Gauss-en bitartez kalkula daiteke:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) = \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) = -\Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right)$$

Izan bedi $S_3 \equiv z = 8$ eta $S' = S_1 \cup S_3$ beste solido bat mugatzen duen gainazal itxia ere. Honetatik irteten den fluxua aurreko kasuan bezala atera daiteke, hau da:

$$\Phi_{S'}\left(\vec{F}\right) = \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right) = \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) = -\Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right)$$

Eta orain $S_3 \equiv z = 8$ gainazaletik irtendakoa kalkulatuko dugu:

$$\Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right) = \iint_{S_3} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_3} \left(x^2\, dydz + y^2\, dzdx - (2x + 2y) z\, dxdy \right) \overset{(1)}{=} - \iint_{R_{xy}} 16(x+y) dxdy \overset{(2)}{=} 0$$

(1) $S_3 \equiv z = 8 \quad \Rightarrow \quad dz = 0$

Eta $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ (Izan ere, marrazkian erraz ikusten denez, $\gamma = 0$)

(2) $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 4$ eskualde simetrikoa da koordenatu ardatzekiko eta x eta y funtzio bakoitiak dira.

Beraz, $\Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) = 0$ eta $\Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) = 0$

c) $C \equiv \begin{cases} S_1 \equiv z = 2(x^2 + y^2) \\ S_2 \equiv z = 4 + x^2 + y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 8 \end{cases}$ kurba itxi eta leuna da beraz, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_{S_3} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} d\vec{S} = \iint_{S_3} \left(-2z\, dydz + 2z dzdx + 0\, dxdy \right) \overset{(S_3 \equiv z=8 \Rightarrow dz=0)}{=} 0$$

5.- Izan bedi $\vec{F}(x,y,z) = (x+y-2)\vec{i} + (x+y)\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ eremu bektoriala.
Kalkulatu $\vec{F}$-ren zirkulazioa A(0,0,0) puntuan hasiera eta B(1,2,3) puntuan amaiera duen C kurba leunean zehar.

(1.5 puntu)

$$\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C(A\to B)} \left[(x+y-2)dx + (x+y)\,dy + z^2\,dz\right]$$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ eremu sinpleki konexuan eta $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}$.

Beraz, $\displaystyle\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da.

Orain bi eratan ebatz dezakegu ariketa:

<u>1. modura:</u>

Aukera dezagun A-tik B-ra doan zuzena (biderik errazena alegia):

$$C \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \equiv \begin{cases} x = x \\ y = 2x \quad 0 \le x \le 1 \\ z = 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(x + 2x - 2 + 2(x+2x) + 3\cdot 9x^2\right)dx = \int_0^1 \left(27x^2 + 9x - 2\right)dx =$$

$$= \left(9x^3 + \frac{9x^2}{2} - 2x\right)_0^1 = 9 + \frac{9}{2} - 2 = \frac{23}{2}$$

<u>2. modura:</u>

Kalkula dezagun funtzio potentziala:

$$U(x,y,z) = \int_0^x (t+y-2)dt + \int_0^y t\,dt + \int_0^z t^2 dt = \left(\frac{t^2}{2} + yt - 2t\right)_0^x + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^y + \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^z =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + yx - 2x + k$$

Eta $\displaystyle\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = \frac{1}{2} + 2 + 9 + 2 - 2 = \frac{23}{2}$