Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	1. zatia

Azterketak bi zati ditu, partzial biei dagozkienak. Lehenengo zatiak 6 ariketa ditu, eta 10 puntu balio du. Bigarren zatiak 5 ariketa ditu eta 10 puntu balio du. Zati biak egin behar dituztenek 10 puntu atera behar dute azterketa gainditzeko.

1. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 45 minutu

LEHENENGO ZATIA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{7}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)}$.

(Puntu 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{7}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}\cdot\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{7}{n}\cdot\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{2}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2}{\frac{7}{n}\cdot\frac{9}{2n^2}} = \frac{6}{7}$$

2.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{4n+1}}{(4n+1)!}$ seriearen izaera.

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{non} \quad a_n = \frac{(2n)^{4n+1}}{(4n+1)!} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D´Alembert-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)^{4n+5}}{(4n+5)!} \cdot \frac{(4n+1)!}{(2n)^{4n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n} \right)^{4n} \cdot \frac{(2n+2)^5}{2n(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)}$$

$$\sim \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^4 \cdot \frac{2^5 \cdot n^5}{2 \cdot 4^4 \cdot n^5} = \frac{e^4}{2^2} = \left(\frac{e}{2} \right)^4 > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{dibergentea da.}$$

3.- Aurkitu $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ch}(n)\cdot x^n$ berretura-seriearen batura, bere konbergentzi arloa adieraziz.

<u>Oharra</u>: $\mathrm{Ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(2 puntu)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ch}(n)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2}\cdot x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(ex)^n + \left(\frac{x}{e}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

Non:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (ex)^n$ serie geometrikoa da, $r = ex$ izanik.

Konbergentea da $\Leftrightarrow$ $|r| = e|x| < 1$ $\Leftrightarrow$ $|x| < \dfrac{1}{e}$ $\Leftrightarrow$ $x \in \left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{e}\right)^n$ serie geometrikoa da, $r = \dfrac{x}{e}$ izanik.

Konbergentea da $\Leftrightarrow$ $|r| = \dfrac{|x|}{e} < 1$ $\Leftrightarrow$ $|x| < e$ $\Leftrightarrow$ $x \in (-e, e)$

Orduan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ch}(n)\cdot x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-\frac{x}{e}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x}\right) =$$

$$= \frac{-x\left(1+e^2\right)}{2(1-ex)(e-x)} \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

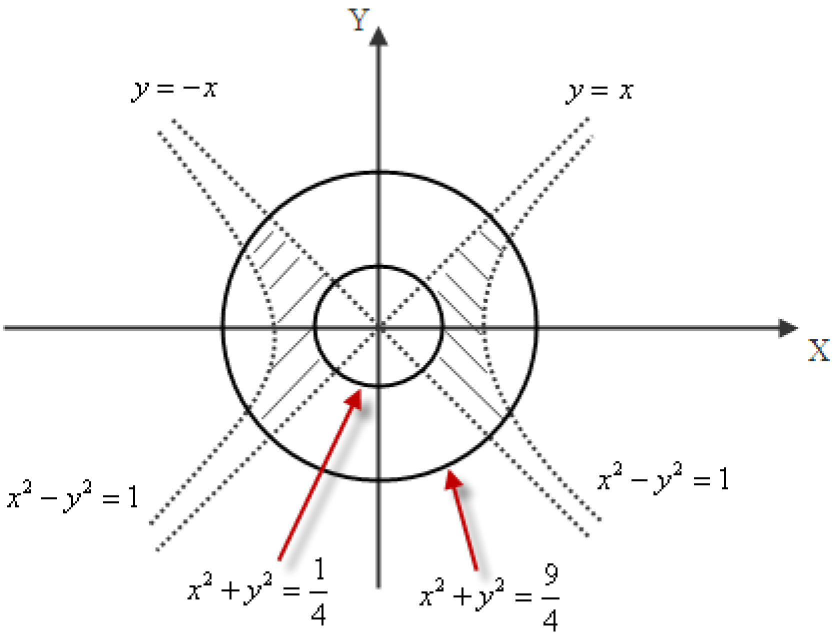
4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=e^{\frac{1}{\sqrt{1+y^2-x^2}}}+\mathrm{L}\left(x^2-y^2\right)+\arcsin\left(x^2+y^2-\frac{5}{4}\right)$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,1+y^2-x^2>0,\ \ x^2-y^2>0,\ \ -1\le x^2+y^2-\frac{5}{4}\le 1\right\}$$

- $1+y^2-x^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-y^2<1$
- $x^2-y^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2>y^2 \quad\Leftrightarrow\quad |x|>|y|$
- $-1\le x^2+y^2-\frac{5}{4}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}\le x^2+y^2\le\frac{9}{4}$



5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n\cdot y\cdot\sin\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0), \quad \forall n\in\mathbb{N}.\\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) **Estudiatu *f*-ren jarraitutasuna (0,0) puntuan.**

b) **Kalkulatu *f*-ren deribatu partzialak (0,0) puntuan.**

c) **Aztertu *f* diferentziagarria ote den (0,0) puntuan.**

(2 puntu)

a) f jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^n\cdot y\cdot\sin\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\dfrac{\rho\left(\cos\theta+\sin\theta\right)}{\rho}\right)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\rho^{n-1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin(\cos\theta+\sin\theta)=\begin{cases}\varphi(\theta) & \text{baldin } n=1\\ 0 & \forall n\geq2\end{cases}$$

Beraz, f jarraitua da (0,0) puntuan $\forall n\geq2$.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\text{im}_{k\to0}\dfrac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) Baldin $n=1$, f ez da jarraitua (0,0) puntuan $\Rightarrow f$ ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

$\forall n\geq2$ baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot h-f'_y(0,0)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \dfrac{h^n \cdot k \cdot \sin\left(\dfrac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{h^2+k^2} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| h^n \cdot k \cdot \sin\left(\dfrac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right|}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} \frac{\left| \dfrac{\rho^{n+1} \cdot \cos^n\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\dfrac{\rho\left(\cos\theta+\sin\theta\right)}{\rho}\right)}{\rho^2} \right|}{\rho} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} \rho^{n-2} \cdot \left|\cos^n\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\right| = \begin{cases} \varphi(\theta) & \text{baldin } n=2 \\ 0 & \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Beraz, f diferentziagarria da (0,0) puntuan $\forall n \geq 3$.

6.- Laborategi biomediko batean izandako istripu baten ondorioz birus bat hedatzen ari da. Ingurumenaren kutsadura-maila $f(x,y) = \mathrm{L}y - e^x + \dfrac{y^2}{2} + 7\cdot\varphi\left(x^2\right)$ **funtzio diferentziagarriak adierazten du, non** (x,y) **posizioa den. Laborategian oraindik kutsatu ez diren bi ikertzaile daude, Gauss eta Cauchy.**

a) Baldin Gauss (0,1) puntuan badago, norantz ihes egin behar du kutsadura-maila ahalik eta arinen jaisteko?

b) Cauchy (1,1) puntuan dago eta norabide bat jarraituz kutsadura-maila $\sqrt{3}$ **unitate igotzen da. Determinatu zein den norabide hori.**

Datua: $\varphi'(1) = \dfrac{e}{14}$

(2 puntu)

a) Kutsadura-maila ahalik eta arinen jaitsiko da $-\overrightarrow{\nabla f}(0,1)$ bektorearen norabidean.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = -e^x + 14x\cdot\varphi'\left(x^2\right) \quad \Rightarrow \quad f'_x(0,1) = -1 \\ f'_y = \dfrac{1}{y} + y \quad \Rightarrow \quad f'_y(0,1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\overrightarrow{\nabla f}(0,1) = (1,-2)$$

b) Kutsadura-maila $\sqrt{3}$ unitate igotzen da $\vec{u} = \left(h_1, h_2\right)$ bektore unitarioak adierazitako norabidean $\Leftrightarrow$ $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = \sqrt{3}$. Hau da:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = \sqrt{3} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'_x(1,1)\cdot h_1 + f'_y(1,1)\cdot h_2 = \sqrt{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2h_2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) f diferentziagarria baita.

(2) $\begin{cases} f'_x(1,1) = 0 \\ f'_y(1,1) = 2 \end{cases}$

Eta $\vec{u} = \left(h_1, h_2\right)$ bektore unitarioa dela kontuan hartuta $\Rightarrow \quad h_1 = \pm\dfrac{1}{2}$.

Beraz, $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ eta $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ norabideetan kutsadura-maila $\sqrt{3}$ unitate igotzen da.

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	2. zatia

Azterketak bi zati ditu, partzial biei dagozkienak. Lehenengo zatiak 6 ariketa ditu, eta 10 puntu balio du. Bigarren zatiak 5 ariketa ditu eta 10 puntu balio du. Zati biak egin behar dituztenek 10 puntu atera behar dute azterketa gainditzeko.

2. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 30 minutu

BIGARREN ZATIA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $F(x,y,z)=z^3+x^2\cdot z-y^2\cdot z-1$ **funtzioa emanik:**

a) **Aurkitu** $a\in\mathbb{R}$ **parametroaren balioa,** $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua defini dezan** $P(x,y,z)=(2,-2,a)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) **Aurkitu** $z=z(x,y)$ **funtzioak adierazitako gainazalari dagokion *P* puntuko plano ukitzailearen ekuazioa.**

(2 puntu)

a) Ikus dezagun ea $F(x,y,z)=z^3+x^2\cdot z-y^2\cdot z-1=0$ ekuazioak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,z)=(2,-2,a)$ puntuaren ingurune batean.

i. $F(P)=a^3+4a-4a-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=1$

ii. $F'_x=2xz \quad F'_y=-2yz \quad F'_z=3z^2+x^2-y^2$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $F'_z(P)=3a^2=3\neq 0$

Beraz, $a=1$ denean, $P(x,y,z)=(2,-2,a)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(2,-2)=1$.

b) $z = z(x, y)$ funtzioak adierazitako gainazalari dagokion P puntuko plano ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$z - 1 = z'_x(2,-2)\cdot(x-2) + z'_y(2,-2)\cdot(y+2)$$

$F(x, y, z(x, y)) = 0$ ekuazioan *x*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$2xz + \left(3z^2 + x^2 - y^2\right)\cdot z'_x = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 4 + 3\cdot z'_x(2,-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x(2,-2) = -\frac{4}{3}$$

Era berean, $F(x, y, z(x, y)) = 0$ ekuazioan *y*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$-2yz + \left(3z^2 + x^2 - y^2\right)\cdot z'_x = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 4 + 3\cdot z'_x(2,-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x(2,-2) = -\frac{4}{3}$$

Orduan, plano ukitzailea:

$$z - 1 = -\frac{4}{3}\cdot(x-2) - \frac{4}{3}\cdot(y+2) \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-2) + 4(y+2) + 3(z-1) = 0$$

2.- Kalkulatu $C \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ **elipsetik** $z = 0$ **planora dauden distantzia maximoa eta minimoa.**

(2 puntu)

Espazioko kurba batetik $z = 0$ planora dagoen distantzia $d(x, y, z) = z$ funtzioak ematen du, non (x, y, z) kurba horretako puntua den. Gainera C kurba multzo itxi eta mugatua da (elipsea hain zuzen ere), beraz Weierstrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan $d(x, y, z) = z$ funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak dituela.

Beraz, kasu honetan, aurkitu behar ditugu $z = x^2 + y^2$ eta $2x + 2y - 2z + 3 = 0$ baldintzak betetzen dituzten (x, y, z) puntuak zeinetarako z koordenatua handiena eta txikiena diren.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu puntu kritikoak kalkulatzeko:

$$w(x, y, z) = z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(2x + 2y - 2z + 3)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x = 2\lambda x + 2\mu = 0 \\ w'_y = 2\lambda y + 2\mu = 0 \end{array}\right\} \overset{kenduz}{\Rightarrow} \quad 2\lambda(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \mu = \frac{1}{2} \,\# \end{cases} \\ x = y \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = z \\ 4x - 2z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{cases} \\ w'_z = 1 - \lambda - 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ 2x + 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \\ B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$ puntu kritikoak lortu ditugu.

Hasierako azalpenaren arabera, beraz:

Distantzia maximoa $z = \frac{9}{2}$ da (A puntutik $z = 0$ planora dagoena alegia).

Distantzia minimoa $z = \frac{1}{2}$ da (B puntutik $z = 0$ planora dagoena alegia).

3.- Aztertu $\int_0^\infty \frac{x^3}{1-e^{\alpha x}}dx$ integral inpropioaren izaera $\forall \alpha > 0$.

(2 puntu)

$I = \int_0^\infty f(x)dx$ non $f(x) = \frac{x^3}{1-e^{\alpha x}} < 0 \quad \forall x \in (0,\infty) \quad \wedge \quad \forall \alpha > 0$

$\nexists f(0)$ baina $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{1-e^{\alpha x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{-\alpha \cdot e^{\alpha x}} = 0 \quad \Rightarrow$ eten gaindigarria dago.

Beraz, puntu singular bakarra ∞ da.

$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx = I_1 + I_2 \quad 0 < a < \infty$

I_1 Riemann-en integrala da.

I_2 integral inpropioaren izaera aztertzeko konparaziozko irizpidea erabiliko dugu. Integral eredua: $\int_a^\infty \frac{dx}{x^m} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m > 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \le 1 \end{array} \right.$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-f(x)}{\frac{1}{x^m}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^{m+3}}{1-e^{\alpha x}} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+3}}{e^{\alpha x}} = 0 \quad \forall \alpha > 0 \wedge \forall m > 0 \quad \Rightarrow$ Baita $\forall m > 1$ ere.

Beraz, I_2 konbergentea da $\quad \Rightarrow \quad I$ konbergentea da.

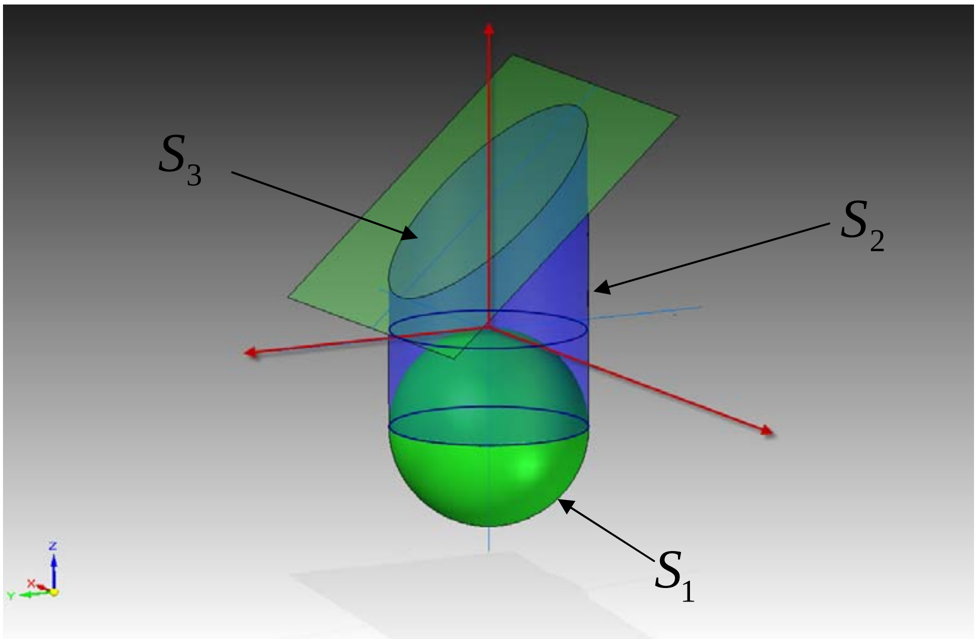
4.- a) Kalkulatu hurrengo hiru gainazalen artean mugaturiko *V* solidoaren bolumena:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+(z+1)^2=1 \quad (z<-1 \ \textbf{izanik}) \\ S_2 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_3 \equiv z=y+k \quad (k>0 \ \textbf{izanik}) \end{cases}$$

b) Izan bedi S_1, S_2 eta S_3 gainazalek osaturiko *S* gainazal itxia, aurreko solidoaren muga. Kalkulatu *k* konstantearen balioa, *S* gainazaletik irteten den fluxuaren balioa, $\vec{F}(x,y,z)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(z+1)\cdot\vec{k}$ bektorearen eraginez, 14π izan dadin.

(2 puntu)

a)



$$Bolumena(V)=\iiint_V dxdydz$$

$$V \equiv \begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+(z+1)^2=1 \quad (z<-1 \ \text{izanik}) \\ S_2 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_3 \equiv z=y+k \quad (k>0 \ \text{izanik}) \end{cases} \Leftrightarrow V \equiv \begin{cases} S_1 \equiv z=-1-\sqrt{1-x^2-y^2} \\ S_2 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_3 \equiv z=y+k \quad (k>0 \ \text{izanik}) \end{cases}$$

Zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \quad |J|=\rho \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 \equiv z=-1-\sqrt{1-\rho^2} \\ S_2 \equiv \rho=1 \\ S_3 \equiv z=\rho\cdot\sin\theta+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ -1-\sqrt{1-\rho^2} \le z \le \rho\cdot\sin\theta+k \end{cases}$$

Orduan:

$$Bolumena(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1-\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho\cdot\sin\theta+k}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho\cdot\left(\rho\cdot\sin\theta+k+1+\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\theta}{3}+\frac{k+1}{2}+\frac{1}{3}\right)d\theta=\left[\frac{-\cos\theta}{3}+\left(\frac{k+1}{2}+\frac{1}{3}\right)\theta\right]_0^{2\pi}=2\pi\cdot\left(\frac{k+1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{(3k+5)\pi}{3}$$

b) $\Phi_S\left(\vec{F}\right)\overset{Gauss}{=}\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz=3\iiint_V dxdydz=3Bolumena(V)=(3k+5)\pi$

Eta $\Phi_S\left(\vec{F}\right)=14\pi=(3k+5)\pi \quad\Leftrightarrow\quad k=3$

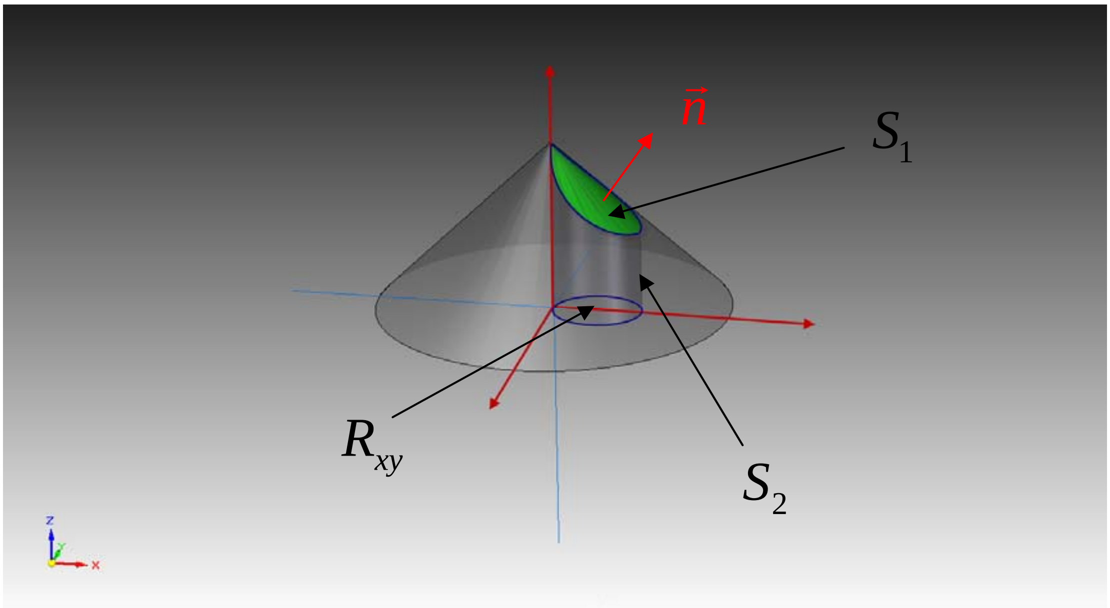
5.- Izan bitez $S_1 \equiv x^2 + y^2 = (z-4)^2 \quad (z < 4 \ \text{izanik})$ **eta** $S_2 \equiv x^2 + (y-1)^2 = 1$ **gainazalak.**

a) **Kalkulatu** S_2 **gainazalak mugaturiko** S_1 **gainazalaren zatiaren azalera.**

b) **Kalkulatu** $\vec{F}(x,y,z) = x^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j} + (z-4)\cdot \vec{k}$ **eremu bektorialaren zirkulazioa** S_1 **eta** S_2 **gainazalen arteko** ***C*** **ebakidura-kurban zehar.**

(2 puntu)

a)



$$Azalera(S_2) = \iint_{S_2} dS = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$$

non $S_1 \equiv z = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + (y-1)^2 \le 1$

Orduan, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$

Beraz, $Azalera(S_2) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} dxdy = \sqrt{2} \cdot Azalera(R_{xy}) = \pi\sqrt{2}$

b) Bi eratan egin daiteke.

<u>1. erara</u>:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \left(x^2 \cdot dx + xy \cdot dy + (z-4)\cdot dz \right)$$

$$C = S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} z = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = 4 - \sqrt{2y} \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \\ z = 4 - \sqrt{2 + 2\sin t} \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\cdot\sin t+\cos^2 t\cdot(1+\sin t)-\frac{\sqrt{2+2\sin t}\cdot\cos t}{\sqrt{2+2\sin t}}\right)dt =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t-\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}-\cos t\right)dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}-\sin t\right]_0^{2\pi}=\pi$$

<u>2. erara</u>:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{Stokes}{=} \iint_{S_1}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} \overset{(1)}{=} \iint_{R_{xy}} y\,dx\,dy \overset{(2)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(1+\rho\sin\theta)\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\theta}{3}\right)d\theta =$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\theta}{3}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

(1) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=(0,0,y)$ eta $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $S_1 \equiv z = 4-\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+(y-1)^2 \le 1$

Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=1+\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}$