Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta 45 minutu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Mendi baten altuera $z = f(x,y)$ funtzio diferentziagarriak adierazten du. $P(x,y) = (1,2)$ puntuan gaude. $\vec{u} = (1,1)$ bektorearen norabidean mugitzen bagara, altueraren aldakuntzaren abiadura $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da. Eta, $\vec{v} = (0,-1)$ bektorearen norabidean mugitzen bagara, berriz, altueraren aldakuntzaren abiadura -2 da.

a) Aurkitu norabidea zeinean mugitu beharko dugu:

i. altuera berdinean mantendu nahi badugu.

ii. ahalik eta arinen jaitsi nahi badugu.

b) Kalkulatu altueraren aldakuntzaren abiadura $2x + y = 31$ zuzenaren norabidean mugitzen bagara.

(1.5 puntu)

a) Altuera berdinean mantentzeko, gradientearekiko perpendikularra den norabidean mugitu beharko dugu. Ahalik eta arinen jaisteko, berriz, minus gradientearen norabidean.

Kalkula ditzagun beraz, *f*-ren deribatu partzialak.

Altueraren aldakuntzaren abiadura norabide batean *f*-ren deribatu direkzionalak ematen du. Eta, *f* diferentziagarria denez, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \overrightarrow{\nabla f}(P)\cdot\vec{u} \quad \forall\vec{u} = (h_1, h_2)$ unitarioa. Orduan,

$\vec{u} = (1,1) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektore unitarioaren norabidean:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = f'_x(P)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + f'_y(P)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad f'_x(P) + f'_y(P) = 1$$

Eta $\vec{v} = (0,-1)$ bektorearen norabidean:

$$\left.\frac{df}{d\vec{v}}\right|_P = -f'_y(P) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad f'_y(P) = 2 \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = -1$$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla f}(P) = (-1,2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Altuera ez da aldatzen } (2,1) \text{ norabidea jarraituz.} \\ \text{Arinen jaisten gara } (1,-2) \text{ norabidea jarraituz} \end{cases}$

b) $2x + y = 31$ zuzenaren norabidea $\vec{u} = (1,-2)$ bektoreak adierazten du. Orduan:

$$\vec{u} = (1,-2) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = f'_x(P)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - f'_y(P)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

<u>Oharra</u>: $\vec{u} = (1,-2)$ beharrean, $\vec{u} = (-1,2)$ aukeratuko bagenu, norabide berdinean baina kontrako noranzkoan mugituko ginateke. Eta, kasu horretan, emaitza $\sqrt{5}$ litzateke. Ikusten denez, $2x + y = 31$ zuzenaren norabidea gradientearena da. Beraz, deribatu direkzional maximoa kalkulatu dugu (aukeratutako noranzkoaren arabera, $\pm\left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right| = \pm\sqrt{5}$ hain zuzen ere).

2.- $F(x,y,z) = xy + e^y - 1 + \int_0^{2y} \sin\left(t^3 + t\right)dt + \int_{-2z}^{0} \cos\left(t^2\right)dt$ **funtzioa eta** $P(x,y,z) = (0,0,0)$ **puntua emanik,**

- **a) Aztertu ea $F(x,y,z) = 0$ ekuazioak $z = z(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duen *P* puntuaren ingurunean.**
- **b) Kalkulatu z'_x , z'_y eta z''_{yx} (0,0) puntuan**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuz:

i. $F(P) = 0$

ii. $F'_x = y \quad F'_y = x + e^y + 2\sin\left(8y^3 + 2y\right) \quad F'_z = 2\cos\left(4z^2\right)$ existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z) = (0,0,0)$ puntuaren ingurunean.

iii. $F'_z(P) = 2 \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z) = (0,0,0)$ puntuaren ingurunean $\exists! z = z(x,y)$ diferentziagarria, $z(0,0) = 0$ izanik.

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioa *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuz:

$$y + 2\cos\left(4z^2\right)\cdot z'_x = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad z'_x(0,0) = 0$$

$$x + e^y + 2\sin\left(8y^3 + 2y\right) + 2\cos\left(4z^2\right)\cdot z'_y = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 1 + 2\cdot z'_y(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_y(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Eta azken ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$1 - 16z\cdot\sin\left(4z^2\right)\cdot z'_x\cdot z'_y + 2\cos\left(4z^2\right)\cdot z''_{yx} = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 1 + 2\cdot z''_{yx}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

3.- Kalkulatu $f(x,y)=x^3-3axy+y^3$ **funtzioaren mutur erlatiboak. Sailkatu** $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ **parametroaren balioen arabera.**

(1.25 puntu)

f-ren puntu kritikoak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2-3ay=0 & \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{x^2}{a} \quad \Rightarrow \quad -3ax+\dfrac{3x^4}{a^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x\left(x^3-a^3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \\ f'_y=-3ax+3y^2=0 \end{cases}$$

Beraz, puntu kritikoak: $A=(0,0)$ eta $B=(a,a)$ $\quad \forall a\neq 0$.

Puntu hauek sailkatuko ditugu:

$$\begin{cases} f''_{x^2}=6x \\ f''_{xy}=-3a \\ f''_{y^2}=6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(A)=0 \\ f''_{xy}(A)=-3a \\ f''_{y^2}(A)=0 \end{cases} \text{eta} \quad \begin{cases} f''_{x^2}(B)=6a \\ f''_{xy}(B)=-3a \\ f''_{y^2}(B)=6a \end{cases}$$

Orduan, $d^2f(A)=-6adxdy \gtrless 0 \quad \Rightarrow \quad A$ zeladura-puntua da

Eta

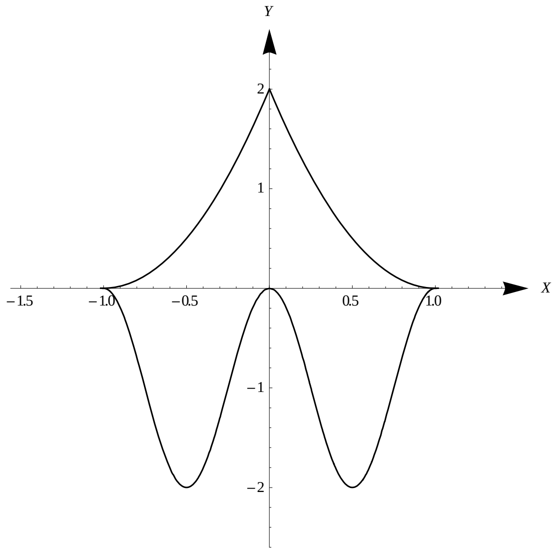
$$d^2f(B)=6a(dx)^2-6adxdy+6a(dy)^2=6a\left[\left(dx-\frac{dy}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(dy)^2\right]\begin{cases} >0 & \forall a>0 \quad \Rightarrow B \text{ minimoa} \\ <0 & \forall a<0 \quad \Rightarrow B \text{ maximoa} \end{cases}$$

Edo, Sylvester-en irizpidea aplikatuz:

$$Hf(A)=\begin{pmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1=0 \\ \Delta_2=-9a^2<0 \quad \forall a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A \text{ zeladura-puntua da.}$$

$$Hf(B)=\begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1=6a\begin{cases} >0 & \forall a>0 \\ <0 & \forall a<0 \end{cases} \\ \Delta_2=36a^2-9a^2=25a^2>0 \quad \forall a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \text{ minimoa da} & \forall a>0 \\ B \text{ maximoa da} & \forall a<0 \end{cases}$$

4.- $\vec{F}(x,y)=(x+y)\,\vec{i}+(2x+1-e^{\sin y})\,\vec{j}$ **eremu bektoriala emanik, kalkulatu bere zirkulazioa irudian erakusten den C kurba itxian zehar,** $C_1 \equiv y=2(x+1)^2$**,** $C_2 \equiv y=2(x-1)^2$ **eta** $C_3 \equiv y=\cos(2\pi x)-1$ **kurbek osaturikoa**



(1.25 puntu)

$\vec{F}$ eremu bektorialaren zirkulazioa C kurban zehar $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ integralak ematen du.

Eta integral hori hiru zatitan kalkulatu behar da:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Hori beharrean, GREEN-en teorema erabil daiteke:

$\vec{F}(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^2$ osoan. C kurba itxia, sinplea eta zatika leuna da, R eskualdea mugatzen duena. Orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C \left(Xdx+Ydy\right)=\iint_R \left(Y'_x-X'_y\right)dxdy$$

Hau da:

$$\begin{cases} X(x,y)=x+y \quad\Rightarrow\quad X'_y=1 \\ Y(x,y)=2x+1-e^{\sin y} \quad\Rightarrow\quad Y'_x=2 \end{cases} \Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_R dxdy = Azalera(R)\overset{(*)}{=}2\cdot Azalera(R_1)$$

(*) R eskualdea OY ardatzarekiko simetrikoa da. Eta $R_1 \equiv \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ \cos(2\pi x)-1\le y\le 2(x-1)^2 \end{cases}$

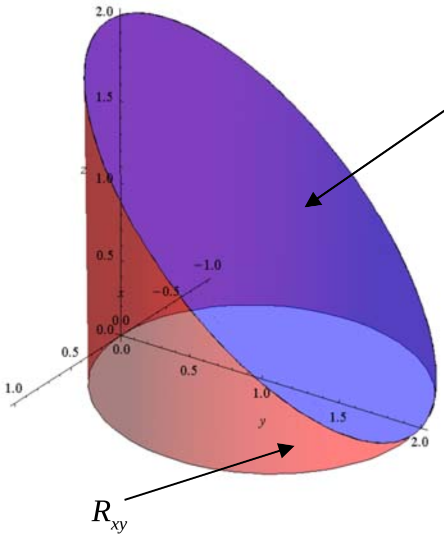
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\int_0^1\int_{\cos(2\pi x)-1}^{2(x-1)^2} dydx=2\int_0^1\left(2(x-1)^2-\cos(2\pi x)+1\right)dx=$$

$$=2\left(\frac{2(x-1)^3}{3}-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}+x\right)_0^1=2\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$$

5.- Kalkulatu $f(x,y,z)=x+y$ funtzioaren gainazal-integrala $x^2+y^2-2y=0$ gainazalak mugatzen duen $z+y=2$ gainazalean.

(Puntu 1)

$$\iint_S f(x,y,z)\cdot dS=\iint_{R_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\left|\vec N\right| dxdy$$



Kasu honetan:

$$S\equiv z=2-y \quad \forall (x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2-2y\le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+(y-1)^2\le 1$$

Orduan, $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{R_{xy}}(x+y)\left|\vec N\right| dxdy \overset{(*)}{=}$

(*) non $\vec N=(0,1,1) \quad\Rightarrow\quad \left|\vec N\right|=\sqrt2$

$$\overset{(*)}{=}\sqrt2\cdot\iint_{R_{xy}}(x+y)dxdy\overset{(**)}{=}\sqrt2\cdot\iint_{R_{xy}} ydxdy$$

(**) x bakoitia da eta R_{xy} simetrikoa $x=0$ zuzenarekiko.

Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=1+\rho\sin\theta\end{cases}$ $\quad |J|=\rho \quad\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$

Beraz,

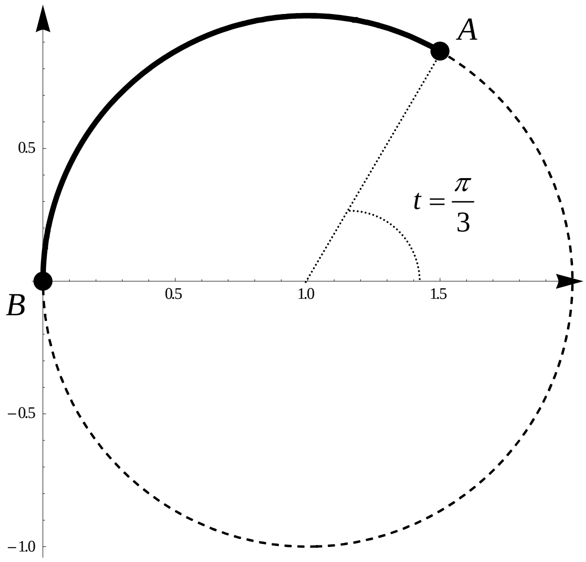
$$\iint_S f(x,y,z)dS=\sqrt2\cdot\iint_{R_{xy}} ydxdy=\sqrt2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho(1+\rho\cos\theta)d\rho\, d\theta=\sqrt2\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac12+\frac{\cos\theta}{3}\right)d\theta=$$

$$=\sqrt2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\theta}{3}\right)_0^{2\pi}=\pi\sqrt2$$

6.- Kalkulatu $f(x,y)=2-x$ funtzioaren lerro-integrala $(x-1)^2+y^2=1$ kurban zehar, $A=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ eta $B=(0,0)$ puntuen artean, bide laburrenetik.

(Puntu 1)

$$\int_{C(A\to B)} f(x,y)\cdot ds=\int_h^k f\left(x(t),y(t)\right)\cdot\left|\vec{r}\,'(t)\right|dt$$



Kasu honetan:

$C\equiv(x-1)^2+y^2=1$

A eta B puntuen artean, beraz:

$$C\equiv\vec{r}(t)\equiv\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\quad \frac{\pi}{3}\le t\le\pi \quad (*)$$

$$\vec{r}\,'(t)\equiv\begin{cases}x'(t)=-\sin t\\ y'(t)=\cos t\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{r}\,'(t)\right|=1$$

(*) A eta B puntuak definitzeko:

$$A\equiv\begin{cases}x=\frac{3}{2}=1+\cos t\Leftrightarrow\cos t=\frac{1}{2}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin t\end{cases}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{3}$$

eta $B\equiv\begin{cases}x=0=1+\cos t\Leftrightarrow\cos t=-1\\ y=0=\sin t\end{cases}\quad\Rightarrow\quad t=\pi$

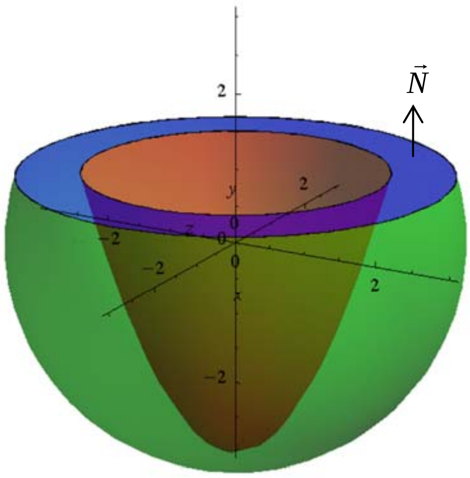
Beraz, $\displaystyle\int_{C(A\to B)} f(x,y)\cdot ds=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos t)dt=\left[t-\sin t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.- $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 9 \\ z \le x^2+y^2-3 \\ z \le 1 \end{cases}$ **solidoa eta** $\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$ **eremu bektoriala emanik:**

a) **Kalkulatu** V **-ren bolumena.**
b) **Izan bedi** S **gainazal itxia** V **solidoaren muga. Kalkulatu** S **zeharkatzen duen** $\vec{F}$ **bektorearen fluxua.**
c) **Kalkulatu** S **gainazaleko** $z=1$ **planoaren zatitik irteten den** $\vec{F}$ **bektorearen fluxua.**

(2.5 puntu)

Esferaren eta paraboloidearen ebakidura: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ x^2+y^2 = z+3 \end{cases} \Rightarrow z^2+z-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ z=-3 \end{cases}$



a) Zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \\ z = z \end{cases}$$

$$V \equiv \begin{cases} \rho^2+z^2 \le 9 \\ z \le \rho^2-3 \\ z \le 1 \end{cases}$$

$$V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ -3 \le z \le 1 \\ \sqrt{z+3} \le \rho \le \sqrt{9-z^2} \end{cases}$$

$$BOL(V) = \int_0^{2\pi}\int_{-3}^{1}\int_{\sqrt{z+3}}^{\sqrt{9-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \pi\int_{-3}^{1}\left(9-z^2-z-3\right)dz = \pi\left[6z-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right]_{-3}^{1} = \frac{56\pi}{3}$$

b) $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $D=\mathbb{R}^3$ eremuan. S gainazal itxia denez, V-ren muga, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3BOL(V) = 56\pi$$

c) $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy = \iint_{R_{xy}} x^2 dxdy =$

non $S_1 \equiv z=1 \quad \forall(x,y)\in R_{xy} \equiv 4 \le x^2+y^2 \le 8 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=(0,0,1) \quad \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

Eta polarretan adierazita: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv R_{\theta\rho} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 2 \le \rho \le \sqrt{8} \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_2^{\sqrt{8}} \rho^3 \cdot \cos^2\theta d\rho\, d\theta = 12\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 6\int_0^{2\pi} \left(1+\cos(2\theta)\right) d\theta = 6\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)_0^{2\pi} = 12\pi$$