EZ-OHIKO DEIALDIA

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}-1}{n^\alpha}\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$ **(0.75 puntu)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}-1}{n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+3}}=\begin{cases}0 & \forall a>-3\\ 1 & a=-3\\ \infty & \forall a<-3\end{cases}$$

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$ **(0.75 puntu)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-(n-1)}=1$$

(*) $\left\{\sqrt{n}\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da beraz, Stolz erabil daiteke.

3.- Izan bedi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **gai ez-negatiboko serie konbergentea. Estudiatu hurrengo serieen izaera:**

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^2\left(\sqrt{a_n}\right)$

(Puntu 1)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ gai ez-negatiboko serie konbergentea da $\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty\neq0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ ezin da konbergentea izan, eta, gai ez-negatibokoa denez, dibergentea da.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\ \Rightarrow\ \tan^2\left(\sqrt{a_n}\right)\sim\left(\sqrt{a_n}\right)^2=a_n\ \Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^2\left(\sqrt{a_n}\right)$ konbergentea da.

4.- a) Aurkitu $f(x)=\arctan\left(4x^2\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Kalkulatu $f^{5)}(0)$ eta $f^{10)}(0)$.

(2.25 puntu)

a) *f* deribatuko dugu:

$$f(x)=\arctan\left(4x^2\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{8x}{1+\left(4x^2\right)^2}=\frac{8x}{1+16x^4}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}8x\cdot\left(-16x^4\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{4n+3}\cdot x^{4n+1}$$

(*) f' serie geometrikoaren batura da,

$$r=-16x^4\Rightarrow\left[\text{konbergentea da}\Leftrightarrow |r|=16x^4<1\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

Integratuz:

$$f(x)\underset{f(0)=0}{=}\arctan\left(4x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{4n+3}\cdot\frac{x^{4n+2}}{4n+2}\quad\forall x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tarteko muga bietan aztertuz:

$$x=\pm\frac{1}{2}\text{ puntuetan }\begin{cases}\exists f\text{ eta jarraitua da}\\ \text{Garapena }\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{4n+2}\text{ konbergentea da}\Rightarrow\exists\text{ batura jarraitua}\end{cases}$$

Beraz, $f(x)=\arctan\left(4x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{4n+3}\cdot\frac{x^{4n+2}}{4n+2}\quad\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

b) Lortutako garapena *f* funtzioaren Taylor-en seriea da, hau da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$. Orduan:

$$4n+2\neq 5\quad\forall n\quad\Rightarrow\quad f^{5)}(0)=0$$

$$4n+2=10\quad\Leftrightarrow\quad n=2\quad\Rightarrow\quad 2^{11}\cdot\frac{x^{10}}{10}=\frac{f^{10)}(0)}{10!}\cdot x^{10}\quad\Leftrightarrow\quad f^{10)}(0)=\frac{2^{11}\cdot 10!}{10}=2^{11}\cdot 9!$$

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki funtzio honen definizio-eremua:

$$f(x,y) \;=\; \sqrt{x^2+y^2-\frac{1}{4}} \;+\; \arccos(y+4x) \;+\; \mathrm{L}(xy)$$

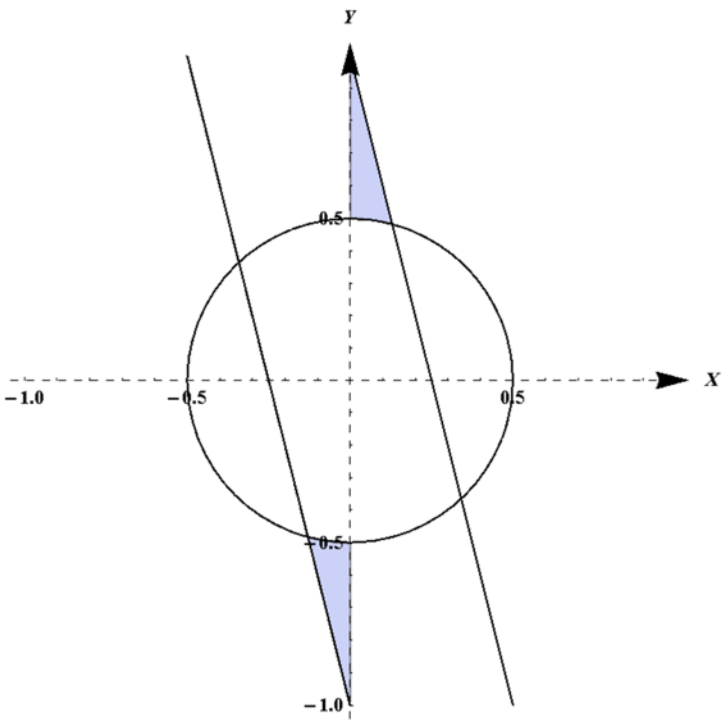
(Puntu 1)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2-\frac{1}{4}\geq 0,\; -1\leq y+4x\leq 1,\; xy>0\right\}$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\geq\frac{1}{4}$$

$$-1\leq y+4x\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1-4x\leq y\leq 1-4x$$

$$xy>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \text{ eta } y>0 \\ \text{edo} \\ x<0 \text{ eta } y<0 \end{cases}$$



6.- $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{2(x^2+y^2)} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ a & \forall (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik, non** $a \in \mathbb{R}$ **:**

- **a) Aurkitu a parametroaren balioa f jarraitua izan dadin.**
- **b) Aurkitutako a parametroaren baliorako, kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$**
- **c) Estudiatu f -ren diferentziagarritasuna (1,0) puntuan.**
- **d) Izan bedi $\vec{u}$ norabidea OX$^+$ ardatzarekin α angelua osatzen duena. Zein balio izango litzateke $\tan\alpha$, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{2}$ izan dadin?**

(2.5 puntu)

a) f jarraitua da $\forall (x,y) \neq (0,0)$

Eta, f jarraitua da $(x,y) = (0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{2(x^2+y^2)} \overset{(*)}{=} \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \forall\theta}} \frac{\rho^4\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)}{2\rho^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \forall\theta}} \frac{\rho^2\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)}{2} = 0$$

(*) $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \forall\theta \in [0, 2\pi)$

Beraz, f jarraitua da $(x,y) = (0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow a = 0$

b) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^4}{2h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{2} = 0$

Eta, simetriaz, $f'_y(0,0) = 0$

c) (1,0) puntuan f funtzio diferentziagarrien konposaketa da beraz, bera ere diferentziagarria da puntu horretan.

d) (1,0) puntuan f funtzio diferentziagarria denez, orduan:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)} = \overrightarrow{\nabla f}(1,0)\cdot\vec{u} = f'_x(1,0)\cdot\cos\alpha + f'_y(1,0)\cdot\sin\alpha$$

non $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, bektore unitarioa den, OX$^+$ ardatzarekin osaturiko angelua α izanik.

(1,0) puntuko deribatu partzialak deribazio-erregelak erabiliz kalkulatuko ditugu:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{4x^3\cdot 2(x^2+y^2) - 4x(x^4+y^4)}{4(x^2+y^2)^2} & \Rightarrow \quad f'_x(1,0) = 1 \\ f'_y(x,y) = \dfrac{4y^3\cdot 2(x^2+y^2) - 4y(x^4+y^4)}{4(x^2+y^2)^2} & \Rightarrow \quad f'_y(1,0) = 0 \end{cases}$$

Orduan, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)} = \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \pm\sqrt{3}$

7.- $f(x,y) = x \cdot g(y^2+1) + x^2$ **funtzioa emanik, non** f **eta** g **funtzio diferentziagarriak diren, deribatu diferentziagarriekin, estudiatu ea** $P(0,1)$ **eta** $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ **puntu kritikoak diren, eta, baiezko kasuan, sailkatu, jakinda** $g(2)=0$**,** $g'(2)=1$**,** $g''(2)=1$ **,** $g(5)=-1$**,** $g'(5)=0$ **eta** $g''(5)=1$**.**

(1.5 puntu)

$$f(x,y) = x \cdot g(y^2+1) + x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_x(x,y) = g(y^2+1) + 2x \\ f'_y(x,y) = x \cdot 2y \cdot g'(y^2+1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_x(P) = 0 \quad f'_x(P) = 0 \\ f'_y(P) = 0 \quad f'_y(Q) = 0 \end{cases}$$

Beraz, P eta Q puntu kritikoak dira.

Sailkatzeko, bigarren diferentzialaren zeinua aztertuko dugu:

$$d^2 f = f''_{x^2} \cdot (dx)^2 + 2 f''_{xy} \cdot dxdy + f''_{y^2} \cdot (dy)^2$$

$$\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = 2y \cdot g'(y^2+1) \\ f''_{y^2}(x,y) = 2x \cdot g'(y^2+1) + 2xy \cdot 2y \cdot g''(y^2+1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''_{x^2}(P) = 2 \quad f''_{x^2}(Q) = 2 \\ f''_{xy}(P) = 2 \quad f''_{xy}(Q) = 0 \\ f''_{y^2}(P) = 0 \quad f''_{y^2}(Q) = 8 \end{cases}$$

Orduan,

$d^2 f(P) = 2(dx)^2 + 4dxdy \gtrless 0 \quad \Rightarrow \quad P$ zeladura-puntua da.

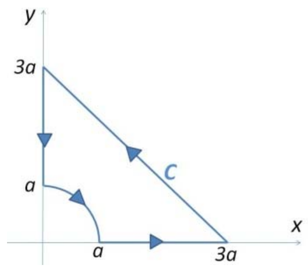
$d^2 f(P) = 2(dx)^2 + 8(dy)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ minimo erlatiboa da

<u>OHARRA</u>: Bigarren diferentzialaren zeinua Sylvester-en irizpidea erabiliz ere azter daiteke.

$$Hf(P) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = -4 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P \text{ zeladura-puntua da.}$$

$$Hf(Q) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 16 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q \text{ minimo erlatiboa da.}$$

8.- Kalkulatu $\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)$ lerro-integrala, C^+ marrazkian erakusten den kurba izanik, hiru zuzenkik eta zirkunferentziaren laurdenak osatuta, erloju-orratzen kontrako noranzkoan ibilitakoa.



(1.25 puntu)

$\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)=\oint\limits_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, non C^+ kurba sinplea, itxia eta zatika leuna den, R eskualdearen muga, eta, $\vec{F}=(y,3x)$ bektore jarraitua, deribatu partzial jarraituekin. Orduan, Green-en teorema erabil daiteke:

$$\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)=\oint\limits_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{R}\left(Y'_x-X'_y\right)dxdy=\iint\limits_{R}\left(3-1\right)dxdy=2\iint\limits_{R}dxdy=2\cdot\text{Azalera}\left(R\right)$$

R eskualdea triangeluaren barrutik eta zirkunferentziaren kanpotik definituta dagoenez:

$$\text{Azalera}\left(R\right)=\frac{3a\cdot 3a}{2}-\frac{\pi\cdot a^2}{4}=\frac{18a^2-\pi a^2}{4}=\frac{(18-\pi)a^2}{4}\Rightarrow\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)=\frac{(18-\pi)a^2}{2}$$

<u>OHARRA</u>: Lerro-integrala zuzenean ere kalkula daiteke.

$$\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)=\oint\limits_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$C_1\equiv y=0\quad a\le x\le 3a\quad\Rightarrow\int\limits_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

$$C_2\equiv y=3a-x\quad x\ 3a\text{-tik } 0\text{-ra}\quad\Rightarrow\int\limits_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{3a}^{0}(3a-x-3x)dx=\left[3ax-2x^2\right]_{3a}^{0}=9a^2$$

$$C_3\equiv x=0\quad y\ 3a\text{-tik } a\text{-ra}\quad\Rightarrow\int\limits_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

$$C_4\equiv\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\quad t\ \frac{\pi}{2}\text{-tik } 0\text{-ra}\quad\Rightarrow\int\limits_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-a^2\cdot\sin^2 t+3a^2\cdot\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\cos(2t)-1}{2}+3\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt=a^2\left[\frac{\sin(2t)}{4}-\frac{t}{2}+\frac{3t}{2}+\frac{3\sin(2t)}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{\pi a^2}{2}$$

$$\int\limits_{C^+}\left(ydx+3xdy\right)=\oint\limits_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int\limits_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}=9a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{(18-\pi)a^2}{2}$$

9.- Kalkulatu $x^2+y^2=4$ zilindroaren barruan dagoen $z=x^2+y^2$ paraboloidearen zatiaren azalera.

(1.5 puntu)

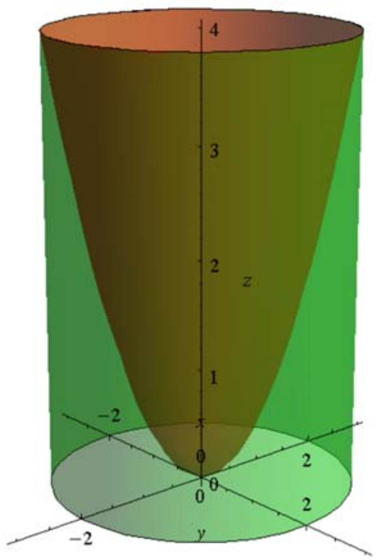
$S \equiv z = x^2+y^2 \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4$ gainazalaren zatiaren azalera kalkulurako hurrengo integrala kalkulatuko dugu:

$$\text{Azalera}(S) = \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\, dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dxdy$$

Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy}\equiv R_{\rho\theta}\equiv \rho^2\le 4 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\rho\theta}\equiv \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \end{cases}$

Orduan,

$$\text{Azalera}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho\, d\theta = 2\pi\cdot \left.\frac{\left(4\rho^2+1\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right|_0^2 = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-1\right)$$



10.- Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=\left(e^{y^2}+z,2x,3z\right)$ **bektorea.**

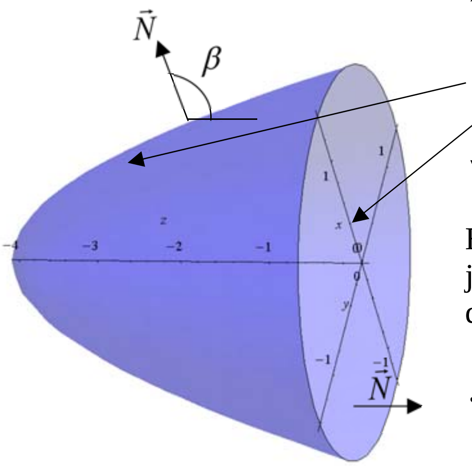
a) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren fluxua hurrengo solidoa mugatzen duen** S **gainazal itxian zehar:**

$$V \equiv 0 \geq y \geq 2z^2+2x^2-4.$$

b) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren fluxua** S **osatzen duen paraboloidearen zatian zehar.**

(1.5 puntu)

a)



$S=S_1\cup S_2$ gainazal itxia da, non

$S_1 \equiv y=2z^2+2x^2-4$

$S_2 \equiv y=0$

$\forall (x,z)\in R_{xz} \equiv x^2+z^2 \leq 2$

Eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira. Beraz, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S}=\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz=3\iiint_V dxdydz$$

Eta, zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \\ y=y \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V\equiv\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq\rho\leq\sqrt{2} \\ 0\geq y\geq 2\rho^2-4 \end{cases}$

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S}=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{2\rho^2-4}^{0}\rho\,dy\,d\rho\,d\theta=6\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left(4-2\rho^2\right)d\rho=6\pi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}=12\pi$$

b) $\displaystyle\iint_{S_1}\vec{F}\,d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xz}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdz$ non

$S_1\equiv y=2z^2+2x^2-4 \quad \forall(x,z)\in R_{xz}\equiv x^2+z^2\leq 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=(-4x,1,-4z)$ eta $\beta>\dfrac{\pi}{2}$

Honela, ebatzi beharreko integrala zaila da. Beraz, beste modu batera planteatuko dugu:

$S=S_1\cup S_2$ gainazal itxia dugu, non $\begin{cases} S_1\equiv y=2z^2+2x^2-4 \\ S_2\equiv y=0 \end{cases} \quad \forall(x,z)\in R_{xz}\equiv x^2+z^2\leq 2$

Orduan, $\displaystyle\iint_S\vec{F}\,d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}\,d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\,d\vec{S}=12\pi \quad\Leftrightarrow\quad \iint_{S_1}\vec{F}\,d\vec{S}=12\pi-\iint_{S_2}\vec{F}\,d\vec{S}$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\, d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xz}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) dxdz \overset{(*)}{=} \iint_{R_{xz}} 2xdxdz \overset{(**)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{2\rho^3}{3}\bigg|_0^{\sqrt{2}} \cdot \sin\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(*) $\vec{N} = (0,1,0)$ eta $\beta < \dfrac{\pi}{2}$

(**) polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xz} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2} \end{cases}$

Beraz, $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\, d\vec{S} = 12\pi$

11.- Izan bedi $\begin{cases} x = 0, \; x = 1 \\ y = e^x, \quad y = e^{-x} \end{cases}$ **kurbek mugaturiko *R* eskualde laua.**

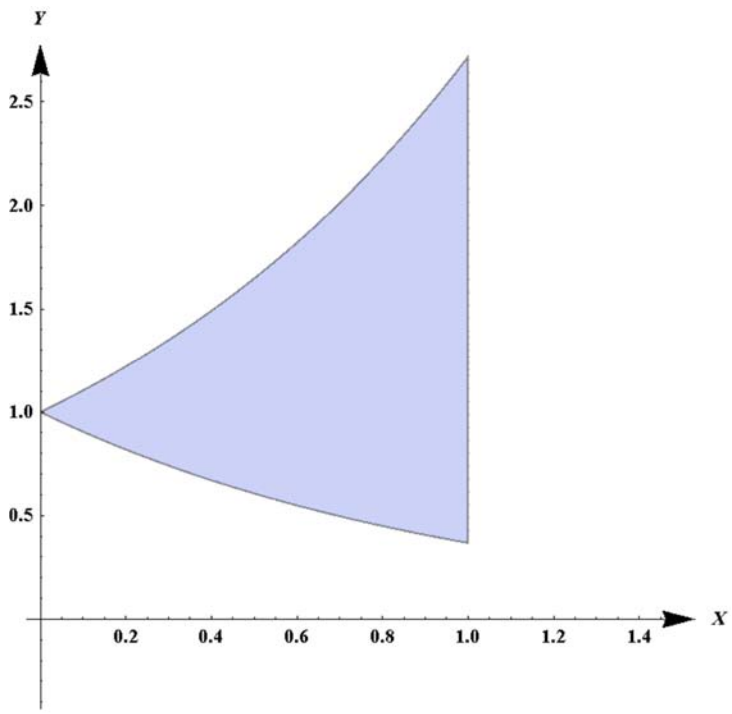
a) Marraztu *R* eskualdea.

b) Kalkulatu, integrazioa erabiliz, eskualde horren azalera.

c) Kalkulatu, integrazioa erabiliz, OX ardatzaren inguruan biratzean, *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena.

(Puntu 1)

a)



b) $\text{Azalera}(R) = \displaystyle\int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left(e^x + e^{-x}\right)_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$

c) $\text{Bolumena}(0X\text{-ren inguruan}) = \displaystyle\int_0^1 \pi\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}\right)_0^1 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - 1$