Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira 1. zatia

Azterketak 10 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketa osoaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Izan bedi $a_n = n^a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$ gai orokorra duen seriea, non $a \in \mathbb{R}$.

a) a parametroaren zein baliotarako egiaztatzen da konbergentzi baldintza beharrezkoa?

b) a parametroaren zein baliotarako aurreko seriea konbergentea da?

c) $a = \frac{1}{2}$ baliorako, aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ seriearen izaera.

(2 puntu)

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-a}} = \begin{cases} 0 & \text{baldin } a<1 \\ 1 & \text{baldin } a=1 \\ \infty & \text{baldin } a>1 \end{cases}$

Beraz, konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen da $\Leftrightarrow a<1$

b) $\forall a \geq 1$ konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da betetzen eta $a_n \geq 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\forall a<1$ konparaziozko irizpidea aplikatuko dugu:

$a_n \sim \frac{1}{n^{1-a}}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-a}} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea da } 1-a>1 \Leftrightarrow a<0 \\ \text{dibergentea da } 1-a \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 0 \end{array} \right.$

Beraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da $\Leftrightarrow a<0$

c) Baldin $a = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ ez da absolutuki konbergentea.

Hala ere, alternatua denez, Leibniz-en irizpidea aplikatuko diogu:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta ii) $a_n = \frac{1}{n^{1/2}} > a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \quad \forall n$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ baldintzaz konbergentea da.

2.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}$, $a>0$ izanik

(2 puntu)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=1^{\infty}=l\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}l=\lim_{x\to\infty}x\cdot\mathrm{L}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}{1/x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1\Leftrightarrow l=e^1=e$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}=\left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}$

Kontuan izanik: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\sim\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{2ax}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}}{2a}=\frac{1}{a}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\infty}=\begin{cases}\infty & \text{baldin } a<1\\ 0 & \text{baldin } a>1\\ 1^{\infty} & \text{baldin } a=1\end{cases}$$

Beraz, baldin $a=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}\right)^{1/x}=l\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\mathrm{L}l=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}\right)\sim\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}-1\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{2\sin x}\right)\sim$$

$$\sim\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{2x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{4x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l=e^0=1$$

3.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\sqrt{2-|x|-|y|}+\sqrt{\sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]}$$

(2 puntu)

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2-|x|-|y|\geq 0 \wedge \sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]\geq 0\right\}$

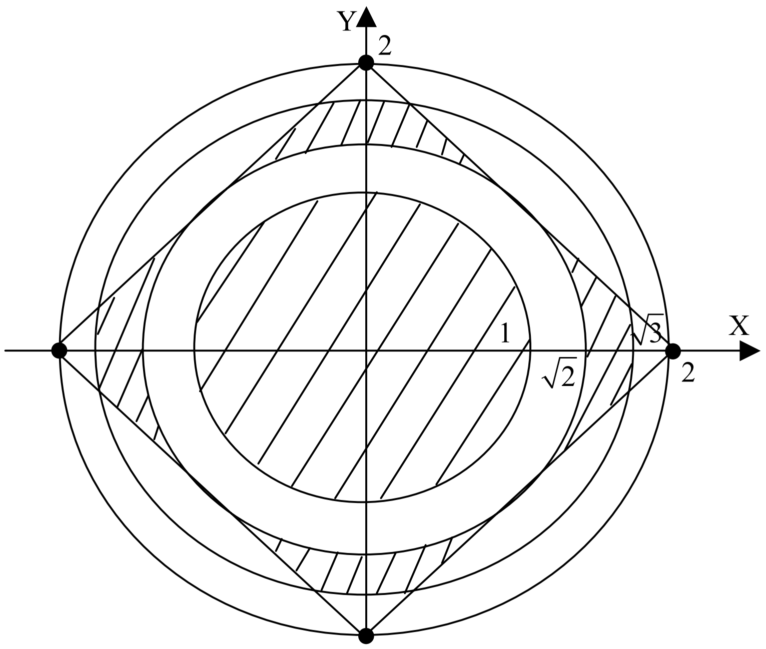
$2-|x|-|y|\geq 0 \Leftrightarrow |x|+|y|\leq 2$

$\sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]\geq 0 \Leftrightarrow \pi\left(x^2+y^2\right)\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\left[2n\pi,(2n+1)\pi\right] \Leftrightarrow x^2+y^2 \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\left[2n,2n+1\right]$

Hau da, baldin $n=0\Rightarrow 0\leq x^2+y^2\leq 1$

baldin $n=1\Rightarrow 2\leq x^2+y^2\leq 3$

baldin $n=2\Rightarrow 4\leq x^2+y^2\leq 5$ (eskualde hau ronbotik kanpo dago, (2,0), (-2,0), (0,2) eta (0,-2) puntuak izan ezik)



Marrazturiko eskualdeak eta (2,0), (-2,0), (0,2) eta (0,-2) puntuek osatzen dute definizio-eremua.

<u>Oharra</u>: $\left.\begin{cases}x+y=2\Rightarrow y=2-x\\ x^2+y^2=2\end{cases}\right\rangle\Rightarrow x^2+(2-x)^2=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{4}=1\Rightarrow y=1\Rightarrow(1,1)$ zuzenaren eta zirkunferentziaren arteko ukitze-puntua da.

Era berean, $\left.\begin{cases}x+y=2\Rightarrow y=2-x\\ x^2+y^2=3\end{cases}\right\rangle\Rightarrow x^2+(2-x)^2=3\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=1\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ zirkunferentziaren eta zuzenaren arteko ebaki-puntuak diren.

4.- $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Determinatu *a* parametroaren balioa *f* jarraitua izan dadin (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu *a* parametroaren balio horretarako $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.
c) Estudiatu ea *f* diferentziagarria den (0,0) puntuan, eta baiezko kasuan, kalkulatu diferentziala puntu horretan.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=a$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\lim_{\rho\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\rho^2}\right)=$$

$=\lim\limits_{\rho\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right)=0 \quad \forall\theta\Rightarrow f$ jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow a=0$

b) $a=0$ baliorako:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{h^4}{h^2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{arctg}\left(h^2\right)}{h}\sim\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=0$$

$f'_y(0,0)=0$ simetriaz.

c) $\forall a\neq0$ *f* ez da jarraitua beraz ezin da diferentziagarria izan.
Baldin $a=0$, B.B.N. erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|\operatorname{arctg}\left(\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right)\right|}{\rho}\sim$$

$\sim\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\rho}=0 \quad \forall\theta\Leftrightarrow f$ diferentziagarria da (0,0) puntuan. Eta bere diferentziala:

$$df(0,0)=f'_x(0,0)\cdot dx+f'_y(0,0)\cdot dy=0$$

5.- Izan bedi $f(x,y)=e^{xy}\cdot\sin(ax+by)$ funtzioa. Baldin ezagutzen bada $A(0,0)$ puntuan f-ren gradientea eta $2x-y-1=0$ zuzena paraleloak direla eta bere deribatu direkzionala OX ardatzaren noranzko positiboan 2 dela, kalkulatu a eta b.

(2 puntu)

$\vec{\nabla}f(0,0)=f'_x(0,0)\cdot\vec{i}+f'_y(0,0)\cdot\vec{j}$

$f'_x=y\cdot e^{xy}\sin(ax+by)+ae^{xy}\cos(ax+by)\Rightarrow f'_x(0,0)=a$

$f'_y=x\cdot e^{xy}\sin(ax+by)+be^{xy}\cos(ax+by)\Rightarrow f'_y(0,0)=b$

$2x-y-1=0$ zuzenaren malda $m=2$ denez eta $\vec{\nabla}f(0,0)$ eta zuzena paraleloak direnez, orduan, $\dfrac{b}{a}=2\Leftrightarrow b=2a$

Gainera, deribatu direkzionala OX ardatzaren noranzko positiboan 2 da, hortaz, $f'_x(0,0)=a=2$. Beraz $b=4$.

Ariketa 6	Ariketa7	Ariketa 8	Ariketa 9	Ariketa 10	Guztira 2. zatia

Azterketak 10 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketa osoaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

6.- $z = z(x, y) = x^y + f(y^x)$ funtzioa emanik, kalkulatu hurrengo adierazpenaren balioa:

$$E = x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \mathrm{L}y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

(2 puntu)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + y^x \cdot f' \cdot \mathrm{L}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \mathrm{L}x + x \cdot y^{x-1} \cdot f'$$

Orduan,

$$E = x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \mathrm{L}y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \left(y \cdot x^{y-1} + y^x \cdot f' \cdot \mathrm{L}y \right) - y \cdot \mathrm{L}y \cdot \left(x^y \cdot \mathrm{L}x + x \cdot y^{x-1} \cdot f' \right) =$$

$$= y \cdot x^y + x \cdot y^x \cdot f' \cdot \mathrm{L}y - y \cdot x^y \cdot \mathrm{L}y \cdot \mathrm{L}x - x \cdot y^x \cdot f' \cdot \mathrm{L}y = y \cdot x^y (1 - \mathrm{L}y \cdot \mathrm{L}x)$$

7.- Kalkulatu $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 15\right\}$ multzoan $z=z(x,y)=4x^2+9y^2-x^2\cdot y^2$ funtzioaren mutur absolutuak.

(2 puntu)

Funtzio jarraitua multzo itxi eta bornatuan daukagunez, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu gutxienez behin maximo eta minimo absolutuak hartu behar dituela.

a) Baldintzarik gabeko puntu kritikoak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} z'_x=8x-2x\cdot y^2=0 \Leftrightarrow 2x(4-y^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \\ z'_y=18y-2y\cdot x^2=0 \Leftrightarrow 2y(9-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 3 \end{cases} \end{cases}$$

Honela 5 puntu kritiko lortzen ditugu: A(0,0), B(3,2), C(3,-2), D(-3,2) eta E(-3,-2), eta bostak *M* multzoaren barnealdean daude.

b) Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, M multzoaren mugan daudenak hain zuzen ere. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=4x^2+9y^2-x^2\cdot y^2+\lambda(x^2+y^2-15)$$

$$\begin{cases} w'_x=8x-2xy^2+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(4-y^2+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda=y^2-4 \end{cases} \\ w'_y=18y-2yx^2+2\lambda y=0 \Leftrightarrow 2y(9-x^2+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \lambda=x^2-9 \end{cases} \\ x^2+y^2=15 \end{cases}$$

Baldin $x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{15} \Rightarrow \lambda=-9$

Baldin $y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{15} \Rightarrow \lambda=-4$

Baldin $\lambda=y^2-4=x^2-9 \Rightarrow y^2=x^2-5$

Eta $x^2+y^2=15$, orduan, $2x^2-20=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10} \Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$

Beraz, 8 puntu kritiko gehiago atera zaizkigu: F$(0,\sqrt{15})$, G$(0,-\sqrt{15})$, H$(\sqrt{15},0)$, I$(-\sqrt{15},0)$, J$(\sqrt{10},\sqrt{5})$, K$(\sqrt{10},-\sqrt{5})$, L$(-\sqrt{10},\sqrt{5})$, M$(-\sqrt{10},-\sqrt{5})$.

Amaitzeko, lortutako 13 puntu kritikoetan *z* funtzioak hartzen dituen balioak konparatu besterik ez dugu egin behar:

$z(A)=0$, $z(B)=z(C)=z(D)=z(E)=36$, $z(F)=z(G)=135$, $z(H)=z(I)=60$, $z(J)=z(K)=z(L)=z(M)=35$

Hortaz, A minimo absolutua da eta F eta G maximo absolutuak dira.

8.- Estudiatu $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^a} dx$, $a \in \mathbb{R}^+$, integralaren izaera.

(2 puntu)

$I = \int_1^{\infty} f(x)dx$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^a} > 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$ eta ∞ puntu singular bakarra da.

Integral eredua: $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^m} \langle \begin{matrix} \text{konbergentea } \forall m > 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \leq 1 \end{matrix}$. Konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi/2}{x^a}}{\frac{1}{x^m}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{x^a} \underset{\underset{m=a}{\uparrow}}{=} \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$$

Hau da, gure integrala eta integral eredua izaera berekoak dira, beraz:

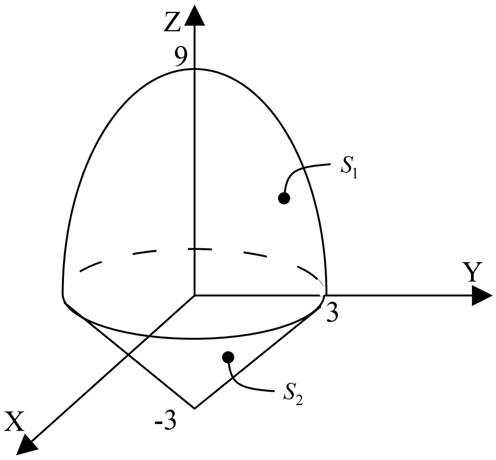
baldin $a > 1$ $\quad I$ konbergentea da eta

baldin $a \leq 1$ $\quad I$ dibergentea da

9.- Kalkulatu $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ bektorearen fluxua $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxian zehar, non $S_1 \equiv z = 9 - x^2 - y^2$ eta $S_2 \equiv z = -3 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2 puntu)

$S_1 \equiv z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidea da (erpina (0,0,9) puntuan eta definituta $z < 9$ denean)
$S_2 \equiv z = -3 + \sqrt{x^2 + y^2}$ konoaren erdia da (erpina (0,0,-3) puntuan eta definituta $z > -3$ denean)
Eta gainazal hauek elkar ebakitzen dira $z = 0$ planoan, $x^2 + y^2 = 9$ kurba osatuz.



S gainazal itxia denez eta $\vec{F}$ jarraitua deribatu partzial jarraituekin, $\vec{F}$-ren fluxua kalkulatzeko Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\Phi_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz$$

non V S gainazalak mugaturiko bolumena den eta $div\left(\vec{F}\right) = 1$. Beraz:

$$\Phi_S = \iiint_V dxdydz =$$

zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $J = \rho$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 3 \Rightarrow -3 + \rho \ge z \le 9 - \rho^2$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\rho-3}^{9-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta = 2\pi\int_0^3 \rho(9 - \rho^2 - \rho + 3) d\rho = 2\pi\left[6\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 = \frac{99\pi}{2}$$

10.- Izan bedi honako hiru gainazal hauek mugatzen duten V solidoa:

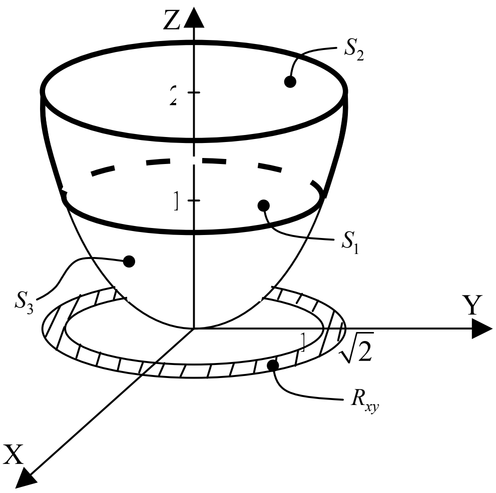
$$\begin{cases} S_1 \equiv z = 1 \\ S_2 \equiv z = 2 \\ S_3 \equiv z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

a) Kalkulatu V solidoaren S_3 gainazalaren zatiaren azalera.

b) Kalkulatu $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$ funtzio bektorialaren zirkulazioa $A(0,0,0)$ eta $B(1,1,2)$ puntuen artean, $C \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^3 + 3y^3 - z^2 = 0 \end{cases}$ kurban zehar.

(2 puntu)

a)



$$\text{Azalera}(S_3) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy =$$

non $z = x^2 + y^2 \Rightarrow z'_x = 2x$ eta $z'_y = 2y$

eta $R_{xy} \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 2$

Polarretan adierazita: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $J = \rho$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $1 \le \rho \le \sqrt{2}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho d\theta = 2\pi \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5^{3/2}\right)$$

b) Kalkulatu behar dugun zirkulazioa $\int_{C(A \to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ lerro-integralak ematen digu.

$\vec{F}$ funtzioa eta euren lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ espazioan (multzo sinpleki konexua alegia), eta gainera $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} (= 0)$, $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} (= 0)$ eta $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} (= 0)$ (non $X = x, Y = y, Z = z$). Beraz, integrala bidearekiko independentea da eta, ondorioz, funtzio potentziala existitzen da:

$$U = x^2 + y^2 + 4z + k$$

eta $\int_{C(A \to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = 9$