Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6		Guztira 1. zatia

Azterketak bi zati ditu. Lehenengoak 6 ariketa ditu eta bigarrenak 4. Zati bakoitzak 15 puntu balio du. Azterketa gainditzeko 15 puntu atera behar dira.

1. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 15 minutu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Adierazi, **arrazoituz,** hurrengo baieztapenak egiazkoak edo gezurrezkoak diren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da $\Leftrightarrow$ absolutuki konbergentea da

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$ konbergentea da $\Leftrightarrow$ absolutuki konbergentea da

c) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada $\Rightarrow$ absolutuki konbergentea da

d) Baldin $\{a_n\}$ konbergentea bada $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da

e) Baldin $\{a_n\}$ dibergentea bada $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

f) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ konbergentea da

g) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea bada $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ dibergentea da

(2 puntu)

a) Gezurrezkoa da.

Izan ere, baieztapen hori zuzena litzateke $\Leftrightarrow a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Kontradibidea: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ez da absolutuki konbergentea, bai ordea baldintzaz konbergentea.

b) Egiazkoa da.

Izan ere, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutuki konbergentea da $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{(a_n \geq 0)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da.

c) Gezurrezkoa da.

a) ataleko kontradibideak balio du.

d) Gezurrezkoa da.

Kontradibidea: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ konbergentea da, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R}$ baita. Baina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da.

e) Egiazkoa da.

$\{a_n\}$ dibergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow$ Ez da betetzen serieen konbergentziarako baldintza beharrezkoa ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

f) Egiazkoa da.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\}$ konbergentea da.

g) Gezurrezkoa da.

d) ataleko kontradibideak balio du.

2.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a \cdot n \cdot x^2}}{n^2}$ seriea emanik, estudiatu bere konbergentzia a eta x parametroen balio errealen arabera.

(3 puntu)

$a_n = \frac{2^{a \cdot n \cdot x^2}}{n^2} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D´Alembert-en irizpidea aplikatzen bazaio:

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{a \cdot (n+1) \cdot x^2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^{a \cdot n \cdot x^2}} = 2^{a \cdot x^2}$. Orduan:

$$2^{a \cdot x^2} < 1 \Leftrightarrow ax^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

$$2^{a \cdot x^2} > 1 \Leftrightarrow ax^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

$$2^{a \cdot x^2} = 1 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{edo} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ kobergentea da.}$$

3.- $y = f(x)$ kurbak $y = \frac{1}{2}x + 1$ asintota zeiharra dauka ($x > 0$). Kalkulatu $y = \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right]^x$ ($x > 0$) kurbaren asintota horizontala.

(2 puntu)

$y = \frac{1}{2}x + 1$ asintota zeiharra $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} & (1) \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = 1 & (2) \end{cases}$. Orduan:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right]^x \overset{(1)}{=} 1^\infty = A \Leftrightarrow \mathrm{L}A = \lim_{x\to\infty} x \cdot \mathrm{L}\left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right] \sim \lim_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} \left[2 \cdot f(x) - x\right]$$

$$= 2 \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] \overset{(2)}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^2 \quad \Rightarrow \quad y = e^2 \text{ asintota horizontala da.}$$

4.- Aurkitu $f(x)=e^x \cdot \frac{1}{1-x}$ funtzioaren berredura-seriezko garapena, konbergentzi erradioa kalkulatuz.

(3 puntu)

$f(x)=g(x)\cdot h(x)$ non:

$$g(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \text{eta} \qquad h(x)=\frac{1}{1-x}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

(*) $r=x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da.

Orduan:

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Konbergentzi erradio, beraz, $R=1$.

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki honako funtzio hauen definizio-eremua:

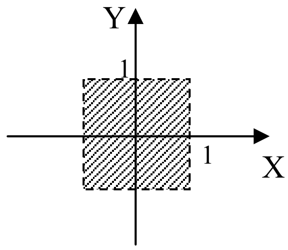
a) $f(x,y) = \mathrm{L}\left(1-x^2\right) - \mathrm{L}\left(1-y^2\right)$

b) $g(x,y) = \dfrac{\mathrm{L}\left(1-x^2\right)}{\mathrm{L}\left(1-y^2\right)}$

Berdinak dira *f* eta *g* funtzioak?

(2 puntu)

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1-x^2 > 0, 1-y^2 > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1, -1 < y < 1\right\}$

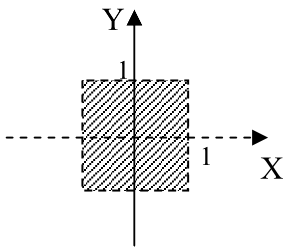


b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1-x^2 > 0, 1-y^2 > 0, \mathrm{L}\left(1-y^2\right) \neq 0\right\}$

$1-x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1$

$1-y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < y < 1$

$\mathrm{L}(1-y^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-y^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \neq 0$



f eta *g* ez dira funtzio berdinak.

6.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin(x)}{y-\sin(y)} & \text{baldin} \quad y\neq 0\\ 0 & \text{baldin } (x,0),\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Estudiatu (0,0) puntuan:

a) *f*-ren jarraitasuna.
b) *f*-ren deribatu partzialak.
a) *f*-ren diferentziagarritasuna.

(3 puntu)

a) $f(0,0)=0$

f-ren limite direkzionalak kalkulatuko ditugu (0,0) puntuan:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\ \forall m\in\mathbb{R}-\{0\}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{mx-\sin(mx)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{m-m\cdot\cos(mx)}\overset{L'H}{=}\frac{1}{m}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{m\cdot\sin(mx)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{m^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{mx}=\frac{1}{m^3}\quad\Rightarrow\quad\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0}{k-\sin(k)}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan ezin da diferentziagarria izan puntu horretan (baldintza beharrezkoa ez baitu betetzen).

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira 2. Zatia

Azterketak bi zati ditu. Lehenengoak 6 ariketa ditu eta bigarrenak 4. Zati bakoitzak 15 puntu balio du. Azterketa gainditzeko 15 puntu atera behar dira.

2. zatiaren iraupena: Ordu 1 eta 30 minutu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Estudiatu $x^2+x^y+z+\sin z-2=0$ ekuazioak $P(x,y,z)=(1,1,0)$ puntuaren ingurune batean $z=z(x,y)$ funtzioa definitzen ote duen.

b) Aurkitu $z=z(x,y)$ funtzio horren deribatu direkzionala $(1,1)$ puntuan $\vec{u}=(2,2)$ bektorearen norabidean.

(3 puntu)

a) $F(x,y,z)=x^2+x^y+z+\sin z-2=0$ ekuazioari funtzio inplizituaren teorema aplikatzen zaio:

i) $F(P)=1+1+0+0-2=0$

ii) F-ren deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira P puntuaren ingurune batean non $x>0$:

$F'_x=2x+y\cdot x^{y-1}$ $\quad$ $F'_y=x^y\cdot \mathrm{L}x$ $\quad$ $F'_z=1+\cos z$

iii) $F'_z(P)=1+\cos 0=2\neq 0$

Orduan, P puntuaren ingurune batean non $x>0$, $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(1,1)=0$.

b) $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} \overset{(*)}{=} z'_x(1,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+z'_y(1,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(*) $\vec{u}=(2,2)$ unitario bihurtu beharra dago: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Hasierako ekuazioan x-rekiko eta y-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$3+2\cdot z'_x(1,1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad z'_x(1,1)=-\dfrac{3}{2}$

$2\cdot z'_y(1,1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad z'_y(1,1)=0$

Beraz, $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2.- Deskonposatu a zenbaki positiboa hiru batugai ez-negatiboetako batuketa gisa, euren kuboen batura minimoa izan dadin. Kalkulatu batura hori.

(2 puntu)

Mutur erlatibo baldintzatuen problema da hau. Lortu behar ditugun hiru batugai ez-negatiboak x, y eta z izanik, $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ funtzioaren minimoa lortu beharra dago $a=x+y+z$ baldintzarekin. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+\lambda(x+y+z-a)$$

Baldintza beharrezkoa (puntu kritikoen kalkulua):

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=3x^2+\lambda \\ w'_y=3y^2+\lambda \\ w'_z=3z^2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=-3x^2=-3y^2=-3z^2 \overset{(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)}{\Rightarrow} x=y=z \\ x+y+z=a \end{array}\right. \Rightarrow 3x=a \Rightarrow x=\frac{a}{3}$$

Beraz, puntu kritiko bakarra lortu dugu: $A=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

Baldintza nahikoa erabiliko dugu orain puntu hori minimoa dela ziurtatzeko:

$$\left\{\begin{array}{l} w''_{x^2}=6x \Rightarrow w''_{x^2}(A)=2a \\ w''_{y^2}=6y \Rightarrow w''_{y^2}(A)=2a \\ w''_{z^2}=6z \Rightarrow w''_{z^2}(A)=2a \\ w''_{xy}=w''_{xz}=w''_{yz}=0 \end{array}\right. \Rightarrow d^2w(A)=2a\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right] \overset{(*)}{>} 0 \Rightarrow A \text{ minimo da}$$

eta $f(A)=3\left(\frac{a}{3}\right)^3=\frac{a^3}{9}$

(*) $a=x+y+z$ baldintza kontuan izanik, $dx+dy+dz=0 \Rightarrow dz=-dx-dy \Rightarrow$ ezin direla hirurak batera nuluak izan.

3.- $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ funtzioa emanik.

a) Kalkulatu bere definizio-eremua eta asintotak. Estudiatu bere simetria, gorapena eta irudikatu gutxi gorabehera.
b) **Planteatu** beharrezkoa den integrala, funtzio horrek adierazitako kurbak, bere asintotek eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera lortzeko. **Ondorioztatu, integrala kalkulatu barik,** azalera hori finitua izango ote den**.**

(4,5 puntu)

a) $D=\left\{x\in\mathbb{R}/4-x^2>0\right\}=(-2,2)$.

Asintotak:
Ezin dira egon asintota horizontalik zein zeiharrik $D=(-2,2)$ tarte finitua baita.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty \Rightarrow x=2$ asintota bertikala da.
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\infty \Rightarrow x=-2$ asintota bertikala da.

Simetriak:

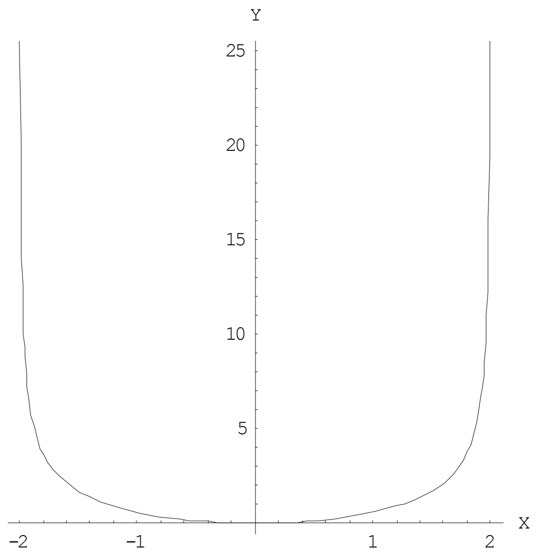
$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=f(x) \;\Rightarrow\; \text{OY ardatzarekiko simetrikoa da.}$$

Gorapena:

$$f'(x)=\frac{x\left(8-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2}\notin D \end{cases}$$

$\forall x\in(-2,0)\quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow f$ beherakorra da.
$\forall x\in(0,2)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow f$ gorakorra da

Beraz (0,0) puntuan minimoa dago.
Adierazpide grafikoa:



b) Azalera simetrikoa da OY ardatzarekiko, beraz,:

$$\text{Azalera}=2\int_0^2 f(x)dx=2\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Integral inpropioa dugu, $f(x)\geq 0\quad \forall x\in\left[0,2\right)$, $x=2$ puntu singularra delarik.

Konparaziozko irizpidean erabiliko dugun integral eredua:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^m} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m<1 \\ \text{dibergentea } \forall m \geq 1 \end{array} \right.$$

Orduan:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{(2-x)^m}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2\cdot(2-x)^m}{\sqrt{4-x^2}} = 4\lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^m}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = 2\lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^m}{\sqrt{2-x}} \underset{\left(m=\frac{1}{2}<1\right)}{=} 2 \in (0,\infty)$$

Beraz, integral inpropio konbergentea dugu eta, hortaz, bere balioa (azalera hain zuzen) finitua izango da.

4.- Izan bitez $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ eremu bektoriala eta hurrengo gainazalek mugaturiko V solidoa:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 & -2\le z\le 0 \\ S_2 \equiv 16(x^2+y^2)=(z-8)^2 & 0\le z\le 4 \\ S_3 \equiv x^2+y^2=5-z & 4\le z\le 5 \end{cases}$$

a) Kalkulatu V solidoaren bolumena.

b) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ kurban zehar.

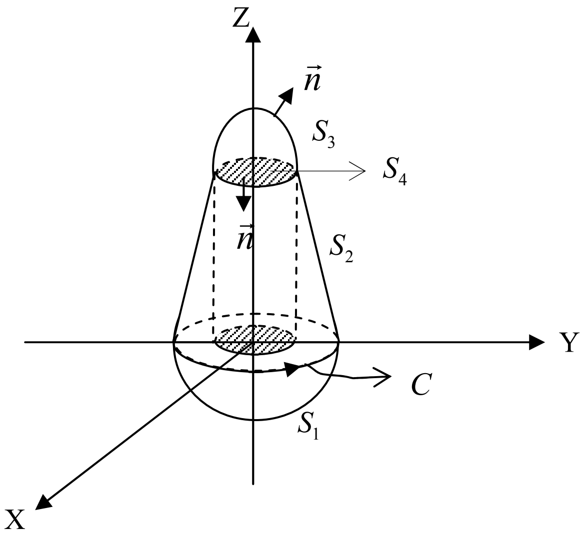
c) Kalkulatu V solidoaren mugako S_3 gainazalaren zatitik irtengo den $\vec{F}$ -ren fluxua:

i) zuzenean.

ii) Gauss-en teoremaren bitartez.

(5,5 puntu)

a)



$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 & -2\le z\le 0 & \Rightarrow & S_1 \equiv z=-\sqrt{4-x^2-y^2} \\ S_2 \equiv 16(x^2+y^2)=(z-8)^2 & 0\le z\le 4 & \Rightarrow & S_2 \equiv z=8-4\sqrt{x^2+y^2} \\ S_3 \equiv x^2+y^2=5-z & 4\le z\le 5 & \Rightarrow & S_3 \equiv z=5-x^2-y^2 \end{cases}$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $J=\rho$. Orduan:

$$0\le\theta\le 2\pi \quad \begin{cases} 0\le\rho\le 1 & \Rightarrow & -\sqrt{4-\rho^2}\le z\le 5-\rho^2 \\ 1\le\rho\le 2 & \Rightarrow & -\sqrt{4-\rho^2}\le z\le 8-4\rho \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{5-\rho^2}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{8-4\rho}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^1\rho\left[5-\rho^2+\sqrt{4-\rho^2}\right]d\rho+2\pi\int_1^2\rho\left[8-4\rho+\sqrt{4-\rho^2}\right]d\rho=$$

$$=2\pi\left[\frac{5\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}+\frac{\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1+2\pi\left[4\rho^2-\frac{4\rho^3}{3}+\frac{\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_1^2=$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{4}-\frac{3^{3/2}}{3}+\frac{4^{3/2}}{3}\right]+2\pi\left[16-\frac{32}{3}-4+\frac{4}{3}+\frac{3^{3/2}}{3}\right]=2\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}+12-\frac{20}{3}\right)=\frac{91\pi}{6}$$

b) Bi eratan kalkula daiteke:

(i) C kurba parametrizatuko dugu lerro-integrala zuzenean kalkulatzeko

$$C\equiv\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}\equiv\begin{cases}x=2\cos t\Rightarrow dx=-2\sin t\\ y=2\sin t\Rightarrow dy=2\cos t\qquad 0\le t\le 2\pi\\ z=0\Rightarrow dz=o\end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\oint_C(ydx-xdy+zdz)=\int_0^{2\pi}(2\sin t\cdot(-2\sin t)-2\cos t\cdot 2\cos t)dt=-4\int_0^{2\pi}dt=-8\pi$$

(ii) C kurba itxia denez Stokes-en teorema erabil dezakegu:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\,d\vec{S}=\iint_S -2dxdy=-2\iint_{R_{xy}}dxdy=-2\cdot\text{Azalera}\left(R_{xy}\right)=-8\pi$$

non $S\equiv z=0\quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 4\quad\Rightarrow\quad \text{Azalera}\left(R_{xy}\right)=4\pi$

c) i) $\Phi_{S_3}=\iint_{S_3}(ydydz-xdzdx+zdxdy)\overset{(1)}{=}\pm\iint_{R_{xy}}(2xy-2xy+5-x^2-y^2)dxdy\overset{(2)}{=}$

(1) $S_3\equiv z=5-x^2-y^2\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}z'_x=-2x\\ z'_y=-2y\end{cases}$

(2) $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ eta $R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 1\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\quad J=\rho\quad 0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le\rho\le 1$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho(5-\rho^2)d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{5\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{9}{4}d\theta=\frac{9\pi}{2}$$

ii) Gauss erabiltzeko gainazal itxia behar dugu beraz, hasteko, V solidoaren mugako S_3 gainazalaren zatia $S_4\equiv z=4$ planoaren bitartez itxiko dugu ($x^2+y^2\le 1$ eskualdean definiturikoa). Gainazal itxi berri honi S' deituko diogu.

$$\Phi_{S'}=\iiint_{V'}div\left(\vec{F}\right)dxdydz=\iiint_{V'}dxdydz=$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\quad J=\rho\quad 0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le\rho\le 1\quad 4\le z\le 5-\rho^2\\ z=z\end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_4^{5-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho(1-\rho^2)d\rho = 2\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Orain $S_4 \equiv z = 4$ planoaren zatitik irtengo den fluxua kalkulatuko dugu:

$$\Phi_{S_4} = \iint_{S_4} (ydydz - xdzdx + zdxdy) \overset{(3)}{=} \pm \iint_{R_{xy}} 4dxdy \overset{(4)}{=} -4 \cdot \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = -4\pi$$

(3) $S_4 \equiv z = 4 \quad \Rightarrow \quad dz = 0$

(4) $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$ eta $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = \pi$

Beraz, $\Phi_{S_3} = \Phi_{S'} - \Phi_{S_4} = \dfrac{\pi}{2} + 4\pi = \dfrac{9\pi}{2}$