Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa5	1. Zatia

Azterketak 9 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

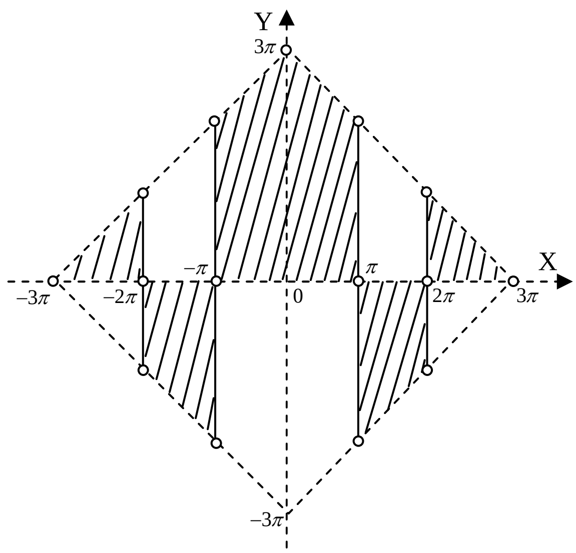
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{\sin x}{xy}}+\mathrm{L}(3\pi-|x|-|y|)$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,/\,xy\neq 0,\ \frac{\sin x}{xy}\geq 0,\ 3\pi-|x|-|y|>0\right\}$$

- $xy\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 0 \quad\wedge\quad y\neq 0$
- $\frac{\sin x}{xy}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\sin x\geq 0 \quad\wedge\quad xy>0 \quad\Rightarrow\begin{cases}x>0 \quad\wedge\quad y>0\\ x<0 \quad\wedge\quad y<0\end{cases}\\ \sin x\leq 0 \quad\wedge\quad xy<0 \quad\Rightarrow\begin{cases}x>0 \quad\wedge\quad y<0\\ x<0 \quad\wedge\quad y>0\end{cases}\end{cases}$
- Eta $\sin x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi,(2k+1)\pi\right]$
- $3\pi-|x|-|y|>0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|+|y|<3\pi$



2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}-an} \quad \forall a\in(0,1]$ **.**

(2 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-an\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-a^2n^2}{\sqrt{n^2+n}+an}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+a\right)}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{baldin } a=1\\ 1^{\infty} & \text{baldin } a\in(0,1)\end{cases}$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}-an}=\begin{cases}1^{1/2}=1 & \text{baldin } a=1\\ 1^{\infty}=A & \text{baldin } a\in(0,1)\end{cases}$

Orduan, $\forall a\in(0,1)$:

$$\mathrm{L}A=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-an\right)\cdot\mathrm{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)\sim\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+a\right)}\cdot\frac{a}{n}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2}{(1+a)n}\cdot\frac{a}{n}=a(1-a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A=e^{a(1-a)}$$

3.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{a^{n}}\right)$ **seriearen izaera** $\forall a>0$ eta $\forall\alpha>0$ **.**

(2 puntu)

$$a_n = n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\geq 0 \quad \text{eta} \quad b_n=\frac{1}{a^n}\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergenteak dira .

$$\forall\alpha>0 \quad a_n = n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\sim n\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}\text{konb. } \forall\alpha>2\ (\Leftrightarrow \alpha-1>1)\\ \text{dib. } \forall\alpha\leq 2\ (\Leftrightarrow \alpha-1\leq 1)\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{a^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ serie geometrikoa da, } r=\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \begin{cases}\text{konb. } \forall a>1\ (\Leftrightarrow \frac{1}{a}<1)\\ \text{dib. } \forall a\leq 1\ (\Leftrightarrow \frac{1}{a}\geq 1)\end{cases}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{a^{n}}\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow$ $\alpha>2$ eta $a>1$. Eta gainerako kasuetan dibergentea da.

4.- a) Aurkitu $f(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, tarte irekia non baliozkoa den adieraziz.
b) Kalkulatu, deribatu gabe, $f''(0)$ eta $f'''(0)$.

(2 puntu)

a) Newton-en binomioaren bitartez garatuko dugu:

$$f(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3/2}{n}\cdot\left(4x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3/2}{n}\cdot 4^n\cdot x^{2n}\quad \forall x/\left|4x^2\right|<1\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

b) Lortutako garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea dela kontuan izanik, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$, orduan:

Baldin $n=1$: $\binom{-3/2}{1}\cdot 4x^2=\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 \quad\Leftrightarrow\quad f''(0)=-\frac{3}{2}\cdot 4\cdot 2=-12$

Eta garapeneko gai guztiak berretura bikoitiak direnez $\Rightarrow\ f'''(0)=0$.

5.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+2y^2} & \text{baldin} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ **.**

c) Estudiatu *f* -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

(2 puntu)

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cdot\sin^3\theta}{\rho^2\cdot\cos^2\theta+2\rho^2\cdot\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to0^+} \rho\cdot\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta} =$$

$$\overset{\forall\theta}{=} 0\cdot\text{bornatua} = 0 = f(0,0) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ jarraitua da } (0,0) \text{ puntuan.}$$

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{0}{h^2}-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{k^3}{2k^2}-0}{k}=\frac{1}{2}$$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Kasu honetan:

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{k^3}{h^2+2k^2}-k\cdot\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|2k^3-kh^2-2k^3\right|}{2\left(h^2+2k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|k|\cdot h^2}{2\left(h^2+2k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\overset{\text{(Polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cdot|\sin\theta|\cdot\cos^2\theta}{2\rho^2\cdot\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)\cdot\rho} = \varphi(\theta)\neq0 \quad \forall\theta$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	2. Zatia

Azterketak 9 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

6.- Izan bedi $F(x,y,z) = xy + z - f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - 1$**, non** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **jarraitua deribatu partzial jarraituekin den, bera eta bere deribatu partzialak nuluak direlarik (0,0) puntuan.**

a) Aztertu ea $F(x,y,z) = 0$ **ekuazioak** $z = z(x,y)$ **funtzioa definitzen ote duen** $P(x,y,z) = (0,0,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Kalkulatu $z'_x(0,0)$ **eta** $z'_y(0,0)$**.**

(2 puntu)

a) i) $F(P) = 1 - 1 = 0$

ii) $F'_x = y - \frac{1}{z} \cdot f'_u$ non $u = \frac{x}{z}$

$F'_y = x - \frac{1}{z} \cdot f'_v$ non $v = \frac{y}{z}$ jarraituak P-ren ingurunean non $z \neq 0$

$F'_z = 1 + \frac{x}{z^2} \cdot f'_u + \frac{y}{z^2} \cdot f'_v$

iii) $F'_z(P) = 1 \neq 0$

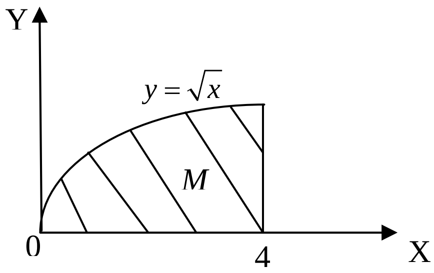
Orduan $\exists z = z(x,y)$ deribatu partzial jarraituekin (0,0) puntuaren ingurune batean, eta $z(0,0) = 1$

b) $z'_x(0,0) = -\frac{F'_x(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)} = 0$ eta $z'_y(0,0) = -\frac{F'_y(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)} = 0$

7.- Kalkulatu $f(x,y)=x^2-4xy+5$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 4, 0\le y\le\sqrt{x}\right\}$ multzoan.

(2 puntu)

f jarraitua denez *M* multzo itxi eta mugatuan, Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.



Puntu kritiko ez-baldintzatuekin hasiko gara:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x-4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{x}{2} \\ f'_y=-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=(0,0)\in M \text{ puntu kritiko bakarra.}$$

Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu (*M*-ren mugakoak hain zuzen ere). Hiru zati bereiziko ditugu:

i) $y=0 \quad \forall x\in[0,4] \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=x^2+5=F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x)=2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad A$$

Eta tarte honetako mugetan: A eta $B(4,0)$ puntu kritikoak ditugu.

ii) $x=4 \quad \forall y\in[0,2] \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=21-16y=G(y) \quad \Rightarrow \quad G'(y)=-16\neq 0$$

Eta hemen ere multzo itxiaren mugak kontuan hartu behar ditugu: A eta $D(4,2)$

iii) $y=\sqrt{x} \quad \forall x\in[0,4] \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=x^2-4x^{3/2}+5=H(x) \quad \Rightarrow \quad H'(x)=2x-6x^{1/2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad A \\ x=9\notin M \end{cases}$$

Zati itxi honetarako, mugak aurreko *A* eta *D* puntuak lirateke.

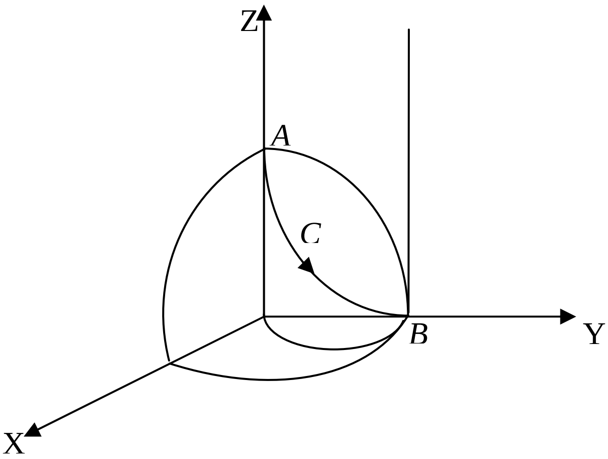
Orain, lortutako puntu kritikoetan *f*-ren balioa balioesten dugu:

$$f(A)=5,\ f(B)=21 \text{ eta } f(D)=-11$$

Beraz, *B* maximo eta *D* minimo absolutuak dira.

8.- $\vec{F}(x,y,z) = x(y+1)\cdot\vec{i} + z^2\cdot\vec{j} - zy\cdot\vec{k}$ **bektorea eta lehenengo oktantean definituriko** $C \equiv \begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \\ S_2 \equiv x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$ **kurba emanik, kalkulatu** $\vec{F}$ **-ren lerro-integrala** $A=(0,0,2)$ **puntutik** $B=(0,2,0)$ **puntura, *C* kurban zehar.**

(2 puntu)



$$C \equiv S_1 \cap S_2 \Rightarrow z^2+2y=4 \overset{z\geq 0}{\Rightarrow} z=\sqrt{4-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \equiv \begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ z=\sqrt{4-2y} \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\cos t \\ y=1+\sin t \\ z=\sqrt{2-2\sin t} \end{cases}$$

A puntutik: $\Rightarrow y=1+\sin t=0 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$

B puntura: $\Rightarrow y=1+\sin t=2 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$

Hau da: $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

Orduan:

$$\int_{C(A\to B)} \vec{F}d\vec{r} = \int_{C(A\to B)} \left(x(y+1)\cdot dx + z^2\cdot dy - zy\cdot dz \right) =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin t\cdot\cos t\cdot(2+\sin t) + \cos t\cdot(2-2\sin t) + \cos t\cdot(1+\sin t) \right) dt =$$

$$= \left[\cos^2 t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2\sin t + 2\cos^2 t + \sin t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2 + 2 + 1 + 1 = \frac{16}{3}$$

9.- Izan bedi hurrengo gainazalek mugaturiko *V* solidoa:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2 + y^2 = z^2 \\ S_2 \equiv x^2 + y^2 = (z-2)^2 \end{cases}$$

a) Kalkulatu *V* solidoa mugatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

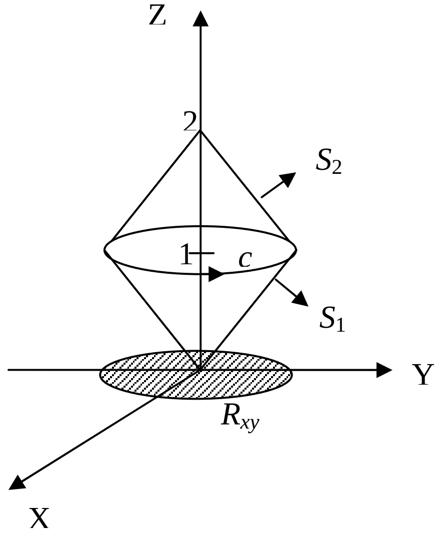
b) Izan bedi $\vec{F}_1(x,y,z) = x^2 \cdot \vec{i} + \frac{2}{3} y^3 \cdot \vec{j} - 2z(x+y^2)\cdot \vec{k}$. Kalkulatu *V* solidoaren mugako S_1 zatia zeharkatzen duen $\vec{F}_1$ bektorearen fluxua.

c) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.

d) Kalkulatu $\vec{F}_2(x,y,z) = 2x \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$ bektorearen zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ kurban zehar.

(4 puntu)

a)



$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2 + y^2 = z^2 \\ S_2 \equiv x^2 + y^2 = (z-2)^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 = (z-2)^2 \Leftrightarrow z = 1$$

$$\begin{cases} S_1 \equiv z = \sqrt{x^2+y^2} \\ S_2 \equiv z = 2 - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 1$$

Orduan, $\text{Azalera}(S_2) = \iint\limits_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy = \iint\limits_{R_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \cdot \text{Azalera}(R_{xy}) = \pi\sqrt{2}$

b) Definizioz, kalkulatu behar dena hurrengo integralak ematen digu:

$$\Phi_{S_1} = \iint\limits_{S_1} \vec{F}_1 d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} \left(x^2 dydz + \frac{2}{3} y^3 dzdx - 2z(x+y^2) dxdy \right)$$

Baina $div\left(\vec{F}_1\right) = 0$ denez, errazena Gauss-en teorema erabiltzea litzateke. Horretarako gainazal itxia behar dugunez, $S_3 \equiv z = 1 \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$ gainazala aukeratuko dugu eta $S_4 \equiv S_1 \bigcup S_3 \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$ gainazal itxia definituko dugu. Gainazal honek mugaturiko bolumena *V´* bada, orduan:

$$\Phi_{S_4} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_3} \overset{GAUSS}{=} \iiint\limits_{V'} div\left(\vec{F}_1\right) dxdydz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_3}$$

Eta $\Phi_{S_3} = \iint\limits_{S_3} \left(x^2 dydz + \frac{2}{3} y^3 dzdx - 2z(x+y^2)dxdy \right) \overset{(z=1 \Rightarrow dz=0)}{=} \iint\limits_{R_{xy}} -2(x+y^2)dxdy =$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow R_{xy} \equiv \rho \le 1 \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta)d\rho\, d\theta = -2\int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos\theta}{3} + \frac{\sin^2\theta}{4} \right] d\theta =$$

$$= -2\left[\frac{\sin\theta}{3} + \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 2\theta}{16} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{S_1} = \frac{\pi}{2}$$

c) $\text{Bolumena}(V) = 2 \cdot \text{Bolumena}(V') \overset{(*)}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^1 \rho dz\, d\rho\, d\theta = 4\pi\int_0^1 \rho(1-\rho)d\rho =$

(*) Zilindrikoeta: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = \rho \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1 \quad S_1 \equiv \rho \le z \le 1$

$$\overset{(*)}{=} 4\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

d) C kurba itxia denez, Stokes-en teorema erabil daiteke, beraz:

$$\oint_C \vec{F}_2\, d\vec{r} \overset{STOKES}{=} \iint\limits_{S_3} \underbrace{\overrightarrow{rot\left(\vec{F}_2\right)}}_{=0} d\vec{S} = 0$$