Azterketak 8 ariketa ditu (bi zatitan bananduta). Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

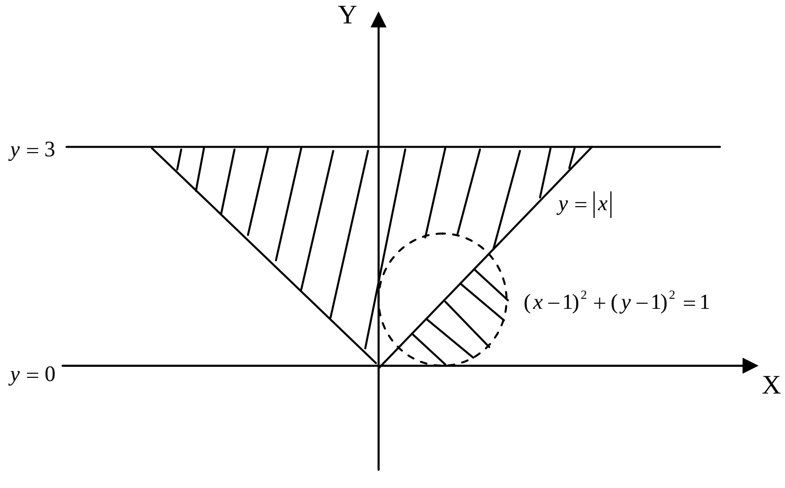
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2y}{3} - 1\right) + \sqrt{\frac{|x| - y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2}}$$

(2 puntu)

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ -1 \le \frac{2y}{3} - 1 \le 1,\ \frac{|x|-y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2} \ge 0,\ 1-(x-1)^2-(y-1)^2 \ne 0 \right\}$$

- $-1 \le \dfrac{2y}{3} - 1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \dfrac{2y}{3} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y \le 3$
- $1-(x-1)^2-(y-1)^2 \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \ne 1$
- $\dfrac{|x|-y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x| - y \ge 0 \quad \wedge \quad 1-(x-1)^2-(y-1)^2 > 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ |x| - y \le 0 \quad \wedge \quad 1-(x-1)^2-(y-1)^2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \le |x| \quad \wedge \quad (x-1)^2+(y-1)^2 < 1 \\ \qquad\qquad \vee \\ y \ge |x| \quad \wedge \quad (x-1)^2+(y-1)^2 > 1 \end{cases}$$



2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n+\mathrm{L}n)\cdot\left(2^{1/n}-1\right)}{\left(n^2+4\right)\cdot \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2}{n}\right)}$ **.**

(2 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+\mathrm{L}n)\cdot\left(2^{1/n}-1\right)}{\left(n^2+4\right)\cdot \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2}{n}\right)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot \mathrm{L}\left(2^{1/n}\right)}{n^2\cdot\dfrac{4}{n^2}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\mathrm{L}2 = \frac{\mathrm{L}2}{2}$$

3.- Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\lambda^n \cdot n!} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$**.**

a) λ **-ren zein baliotarako betetzen da konbergentzi baldintza beharrezkoa?**

b) Aztertu seriearen izaera.

(3 puntu)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n^n}{\lambda^n \cdot n!} \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

Baldintza beharrezkoa: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\lambda^n \cdot n!} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{e}{\lambda}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}} = \begin{cases} \infty \text{ baldin } \frac{e}{\lambda} > 1 \\ 0 \text{ baldin } \frac{e}{\lambda} \leq 1 \end{cases}$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \forall \lambda \geq e$.

b) $\forall \lambda < e \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\forall \lambda \geq e \quad a_n \sim \frac{e^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$

- Baldin $\lambda = e \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmonikoarekin konparatuz, $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

- Baldin $\lambda > e \Rightarrow$ D´Alambert aplikatuko dugu:

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{\lambda^{n+1} \cdot \sqrt{2\pi(n+1)}} \cdot \frac{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{e^n} = \frac{e}{\lambda} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da $\forall \lambda > e$ eta dibergentea da $\forall \lambda \leq e$.

4.- Har dezagun $T(x,y,z)=\dfrac{1}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}$ funtzioa, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ puntuetako tenperatura adierazten duena, eta demagun $P(1,1,3)$ puntuan gaudela.

a) Aurkitu *P* puntuarekiko isotermikoak diren puntuek osaturiko *S* gainazalaren ekuazioa. Adierazi grafikoki gainazal hori.

b) *P* puntutik, aurkitu norabidea eta noranzkoa non tenperaturaren aldakuntza maximoa den.

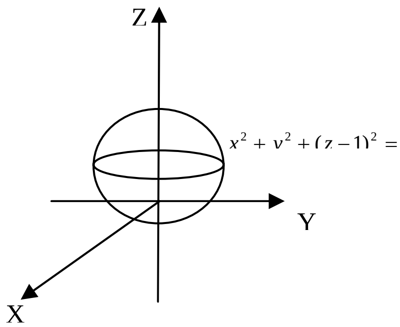
c) Kalkulatu *P* puntuan *S* gainazalari dagokion plano ukitzailearen ekuazioa..

(3 puntu)

a) *P* puntuko tenperatura: $T(P)=\dfrac{1}{e^{1+1+2^2}}=\dfrac{1}{e^6}\Rightarrow$ Puntu isotermikoak:

$$T(x,y,z)=T(P)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}=\frac{1}{e^6}\quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+(z-1)^2=6\,.$$

Hau da, *S* gainazala (0,0,1) puntuan zentroa duen eta $\sqrt{6}$ erradioko esfera da.



b) Tenperaturaren aldakuntza maximoa gradientearen norabidean suertatzen da:

$$\left.\begin{array}{lll}
T'_x=\dfrac{-2x}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}} & \Rightarrow & T'_x(P)=\dfrac{-2}{e^6}\\[2ex]
T'_y=\dfrac{-2y}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}} & \Rightarrow & T'_y(P)=\dfrac{-2}{e^6}\\[2ex]
T'_z=\dfrac{-2(z-1)}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}} & \Rightarrow & T'_x(P)=\dfrac{-4}{e^6}
\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{\nabla T}(P)=\left(\frac{-2}{e^6},\frac{-2}{e^6},\frac{-4}{e^6}\right)$$

Beraz, tenperaturaren igoera maximoa $(-1,-1,-2)$ norabidean eta noranzkoan dugu.

c) *S* gainazalean tenperatura ez da aldatzen (tenperaturaren aldakuntza minimoa dugu alegia), beraz *P* puntuko plano ukitzailea eta tenperaturaren aldakuntza maximoaren norabideak elkarzutak dira. Beraz,

$$(-1,-1,-2)\,||\,\overrightarrow{\nabla T}(P)=\left(\frac{-2}{e^6},\frac{-2}{e^6},\frac{-4}{e^6}\right)$$

plano ukitzailearen bektore karakteristikoa da.
Hau da:

$$-x-y-2z+D=0$$

Eta $P(1,1,3)\in S$ ukitze-puntua denez: $-1-1-6+D=0\quad\Leftrightarrow\quad D=8$

Beraz, plano ukitzailea honako hau da: $x+y+2z-8=0$

5.- $\begin{cases} x^2+\operatorname{tg} y+z^2+\sin t=2 \\ xt^2+y^2+\mathrm{L}\left(z^2\right)=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik,**

a) Estudiatu ea aurreko sistemak $z=z(x,y)$ eta $t=t(x,y)$ funtzio inplizituak definitzen dituen $P(x,y,z,t)=(1,0,1,0)$ puntuaren ingurune batean.

b) Egiaztatu ea $z=z(x,y)$ funtzioak mutur erlatiboa duen (1,0) puntuan (ez sailkatu).

(3 puntu)

a) $\begin{cases} F(x,y,z,t)=x^2+\operatorname{tg} y+z^2+\sin t-2=0 \\ G(x,y,z,t)=xt^2+y^2+\mathrm{L}\left(z^2\right)=0 \end{cases}$ eta $P(x,y,z,t)=(1,0,1,0)$ emanik:

i. $\begin{cases} F(P)=1+1-2=0 \\ G(P)=0 \end{cases}$

ii. $\left.\begin{matrix} F'_x=2x & F'_y=\dfrac{1}{\cos^2 y} & F'_z=2z & F'_t=\cos t \\ G'_x=t^2 & G'_y=2y & G'_z=\dfrac{2}{z} & G'_t=2xt \end{matrix}\right\}$ jarraituak P puntuaren ingurunean.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} 2z & \cos t \\ \dfrac{2}{z} & 2xt \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurunean $z=z(x,y)$ eta $t=t(x,y)$ funtzio diferentziagarriak existitzen dira, non $z(1,0)=1$ eta $t(1,0)=0$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioak mutur erlatiboa ote duen (1,0) puntuan aztertzeko, baldintza nahikoarekin hasiko gara. Horretarako, emandako sisteman x-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z'_x+\cos t\cdot t'_x=0 \\ t^2+\dfrac{2}{z}\cdot z'_x+2xt\cdot t'_x=0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan ordezkatuz}} \begin{cases} 2\cdot z'_x(1,0)+t'_x(1,0)=-2 \\ 2\cdot z'_x(1,0)=0 \iff \boxed{z'_x(1,0)=0} \end{cases}$$

Era berean, y-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 y}+2z\cdot z'_y+\cos t\cdot t'_y=0 \\ 2y+\dfrac{2}{z}\cdot z'_y+2xt\cdot t'_y=0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan ordezkatuz}} \begin{cases} 2\cdot z'_y(1,0)+t'_y(1,0)=-1 \\ 2\cdot z'_y(1,0)=0 \iff \boxed{z'_y(1,0)=0} \end{cases}$$

Beraz, baldintza beharrezkoa egiaztatzen da. (1,0) puntuan mutur erlatiboa egon daiteke.

6.- Estudiatu $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{2^x-1}}\,dx$ integralaren izaera.

(2 puntu)

$I=\int_0^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{non} \;\; f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{2^x-1}}>0 \quad \forall x\in(0,\infty)$

Integral inpropioa da integrazio tartea infinitua baita.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ ere puntu singularra da.

$$I=\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^{a} f(x)\,dx+\int_a^{\infty} f(x)\,dx=I_1+I_2 \quad \text{non} \;\; 0<a<\infty$$

Konbergentzi baldintza beharrezkoa: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ egiaztatzen da.

- I_1 aztertzeko erabiliko dugun integral eredua: $\int_0^{a}\frac{dx}{x^m}\,,\; m>0 \left\langle \begin{array}{l}\text{konbergentea } \forall m<1\\ \text{dibergentea } \forall m\geq 1\end{array}\right.$

  Konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^m\cdot(x^2+1)}{\sqrt{2^x-1}}\sim\lim_{x\to 0^+}\frac{x^m}{\sqrt{\mathrm{L}\left(2^x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}2}}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^m}{x^{1/2}}\underset{m=\frac{1}{2}<1}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}2}}\in(0,\infty)$$

  Beraz, I_1 konbergentea da.

- I_2 aztertzeko erabiliko dugun integral eredua: $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}\,,\; a>0 \left\langle \begin{array}{l}\text{konbergentea } \forall m>1\\ \text{dibergentea } \forall m\leq 1\end{array}\right.$

  Konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^m\cdot(x^2+1)}{\sqrt{2^x-1}}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+2}}{\sqrt{2^x}}=0 \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad \text{Baita } \forall m>1 \text{ ere.}$$

  Beraz, I_2 ere konbergentea da.

Orduan I konbergentea da.

7.- Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=4x\cdot\vec{i}+6y\cdot\vec{j}-\vec{k}$ eremu bektoriala. Kalkulatu, laburki eta erantzuna arrazoituz:

a) $\vec{F}$ -ren zirkulazioa $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ gainazalen arteko *C* ebakidura- kurban zehar.

b) $\vec{F}$ -ren lerro-integrala $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=3t \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ helizearen zatian zehar.

(2 puntu)

$\vec{F}$ eta bere deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan eta $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}=\vec{0}$, beraz, $\int \vec{F}d\vec{r}$ bidearekiko independentea da. Orduan:

a) $C\equiv\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ kurba itxi eta sinplea denez $\Rightarrow \oint_C \vec{F}d\vec{r}=0$

b) $C'\equiv\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=3t \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ izanik $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{C'}\vec{F}d\vec{r}=\int_A^B(4xdx+6ydy-dz)\overset{(*)}{=}\int_1^0 4xdx+\int_0^1 6ydy-\int_0^{3\pi/2}dz=2x^2\Big|_1^0+3y^2\Big|_0^1-z\Big|_0^{3\pi/2}=$$

$$=-2+3-\frac{3\pi}{2}=1-\frac{3\pi}{2}$$

(*)

$$t=0 \Rightarrow A\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow B\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

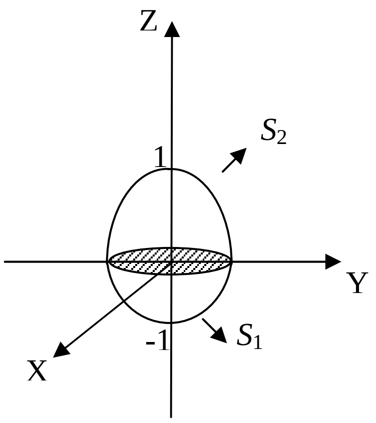
8.- Kalkulatu $\vec{V}(x,y,z) = yz\cdot\vec{i} + x^2\cdot\vec{j} + z^2\cdot\vec{k}$ **bektorearen fluxua** $S = S_1 \bigcup S_2$ **gainazal itxian zehar, non** $S_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z < 0 \end{cases}$ **eta** $S_2 \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = 1-z \\ z \geq 0 \end{cases}$

(3 puntu)

S gainazal zatika leuna eta itxia denez, $\vec{V}$ bektore jarraitua eta diferentziagarriaren fluxua kalkulatzeko Gauss-en teorema erabil daiteke. Beraz:

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = \iiint_V div\left(\vec{V}\right) dxdydz = \iiint_V 2z\, dxdydz$$

non V, S gainazalak mugaturiko bolumena den.



Zilindrikoetan planteatuko dugu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \\ z = z \end{cases}$$

$$S_1 \equiv \begin{cases} \rho^2 + z^2 = 1 \\ z < 0 \end{cases} \equiv z = -\sqrt{1-\rho^2}$$

$$S_2 \equiv \begin{cases} \rho^2 = 1 - z \\ z \geq 0 \end{cases} \equiv z = 1-\rho^2$$

Beraz:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad -\sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq 1-\rho^2$$

Orduan:

$$\Phi_S = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{1-\rho^2} 2\rho z\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho\left[\left(1-\rho^2\right)^2 - \left(1-\rho^2\right)\right]d\rho = 2\pi\int_0^1 -\rho^3\left(1-\rho^2\right)d\rho =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = 2\pi\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right] = 2\pi\cdot\frac{-3+2}{12} = -\frac{\pi}{6}$$