KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 1. KONTROLA (A eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- Adieraz itzazu hurrengo limiteen emaitzak (ez bada existitzen, idatzi $\nexists$):

$\nexists \lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\mathrm{L}(x)} = \infty$	$\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{\mathrm{L}(-x)} = -\infty$	$\nexists \lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

(Puntu 1)

2.- Hurrengo limiteetan, idatz ezazu *a* parametroaren balioa (zenbaki erreala edo ∞ izan daiteke), emaitzak zuzenak izan daitezen:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sin(x+a)}{x+a} = 1 \iff a = -3$

b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{L}(x+1)}{x} = 1 \iff a = 0$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{L}(x+1)}{x} = 0 \iff a = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{L}\left(3x^2+1\right)}{\mathrm{L}\left(x^2\right)} = 1 \iff a = \infty$

(Puntu 1)

3.- Aurki ezazu $f(x) = \dfrac{\mathrm{L}\left(1+\frac{x}{3}\right)}{e^{x-2}-1}$ **funtzioaren definizio-eremua.**

(Puntu 1)

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + \frac{x}{3} > 0,\ e^{x-2} - 1 \neq 0 \right\}$$

$$1 + \frac{x}{3} > 0 \iff \frac{x}{3} > -1 \iff x > -3$$

$$e^{x-2} - 1 \neq 0 \iff x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$$

Beraz, $D = (-3,2) \cup (2,\infty) = (-3,\infty) - \{2\}$

4.- $f(x)=\begin{cases} x^2+x^4\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **funtzioa emanik, kalkula itzazu** $f'(0)$ **eta** $f''(0)$**.**

(2 puntu)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h^4\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h+h^3\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)=0$$

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$$

Beraz, kalkulu honetarako, $f'(x)$ ezagutu behar dugu baita $\forall x\neq 0$ puntuetarako ere:

$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=2x+4x^3\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-x^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Orduan:

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2h+4h^3\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-h^2\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2+4h^2\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-h\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right)=2$$

KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 1. KONTROLA (B eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- Adieraz itzazu hurrengo limiteen emaitzak (ez bada existitzen, idatzi $\nexists$):

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\nexists \lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$	$\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\mathrm{L}(-x)}=-\infty$
$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\mathrm{L}(x)}=\infty$	$\lim_{x\to\infty}\mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$	$\nexists \lim_{x\to 0} e^{1/x}$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$	$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

(Puntu 1)

2.- Hurrengo limiteetan, idatz ezazu *a* parametroaren balioa (zenbaki erreala edo ∞ izan daiteke), emaitzak zuzenak izan daitezen:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+a)}{x+a}=1 \quad\Leftrightarrow\quad a=3$

b) $\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{L}(x)}{x-1}=1 \quad\Leftrightarrow\quad a=1$

c) $\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{L}(x+1)}{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=\infty$

d) $\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{L}\left(2x^2-1\right)}{\mathrm{L}\left(x^2\right)}=1 \quad\Leftrightarrow\quad a=\infty$

(Puntu 1)

3.- Aurki ezazu $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}\left(\frac{x}{2}+1\right)}{e^{3-x}-1}$ **funtzioaren definizio-eremua.**

(Puntu 1)

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{x}{2}+1>0,\ e^{3-x}-1\neq 0\right\}$$

$$\frac{x}{2}+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{2}>-1 \quad\Leftrightarrow\quad x>-2$$

$$e^{3-x}-1\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3-x\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 3$$

Beraz, $D=(-2,3)\cup(3,\infty)=(-2,\infty)-\{3\}$

4.- $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^4\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **funtzioa emanik, kalkula itzazu** $f'(0)$ **eta** $f''(0)$**.**

(2 puntu)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+h^4\cdot\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2h+h^3\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right)=0$$

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$$

Beraz, kalkulu honetarako, $f'(x)$ ezagutu behar dugu baita $\forall x\neq 0$ puntuetarako ere:

$$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=4x+4x^3\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Orduan:

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4h+4h^3\cdot\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)+h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4+4h^2\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)+h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)=4$$