KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 2. KONTROLA

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- Adierazi hurrengo baieztapenak ZUZENAK edo OKERRAK diren (jarri X dagokion lekuan):

	Z	**O**
***f* jarraitua da x_0 puntuan** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$	X	
***f* jarraitua bada x_0 puntuan** $\Rightarrow \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$		X
***f* deribagarria da x_0 puntuan** $\Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$	X	
$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists f'(x_0) \in \mathbb{R}$	X	
$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists f'(x_0) \in \mathbb{R}$		X
***f* jarraitua ez bada x_0 puntuan** $\Rightarrow \nexists df(x_0) \in \mathbb{R}$	X	
$\nexists df(x_0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \nexists f'(x_0) \in \mathbb{R}$	X	
***f* diferentziagarria da x_0 puntuan** $\Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$	X	

(2 puntu)

2.- $f(x) = \begin{cases} 1 - x + x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x < 0 \\ A & x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{e^x - 1} & \forall x > 0 \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Kalkula ezazu $A \in \mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin $x = 0$ puntuan.

b) Aurreko atalean lortutako *A* parametroaren balio horretarako, kalkula ezazu $f'(0)$.

c) Diferentzialaz baliatuz, kalkula ezazu, gutxi gorabehera, $f(0.2)$

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $x = 0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[1-x+x^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\mathrm{L}\left(e^x\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0) = A$$

Beraz, f jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=1$

b) $f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-h+h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\left(-1+h\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right)=-1$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{\mathrm{L}(1+h)}{e^h-1}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{L}(1+h)-e^h+1}{h\cdot\left(e^h-1\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{L}(1+h)-e^h+1}{h^2} \overset{(\mathrm{L'H})}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-e^h}{2h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^h-he^h}{2h(1+h)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^h-he^h}{2h} \overset{(\mathrm{L'H})}{=}$$

$$\overset{(\mathrm{L'H})}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{-e^h-e^h-he^h}{2} = -1$$

Beraz, $f'(0^-) = f'(0^+) = -1 \quad\Leftrightarrow\quad f'(0)=-1$

c) f diferentziagarria da a puntuan $\Leftrightarrow$ f deribagarria da a puntuan $\Leftrightarrow$ $\exists f'(a)\in\mathbb{R}$

Eta, f diferentziagarria da a puntuan $\Leftrightarrow$ $\Delta f \simeq df$, $h\to 0$ doanean (h txikia denean, alegia). Hau da:

$$f\left(a+h\right)-f(a)\simeq f'\left(a\right)\cdot h$$

Kasu honetan, $a=0$ puntuan f deribagarria dela frogatu dugu beraz, f–ren balio hurbildua $x=0.2$ puntuan ($h=0.2$), aurreko adierazpenaren bitartez kalkula daiteke:

$$f\left(0.2\right)-f(0)\simeq f'\left(0\right)\cdot(0.2)=-0.2 \quad\Leftrightarrow\quad f\left(0.2\right)\simeq 1-0.2=0.8$$