KALKULUA (31 Taldea) – MINTEGIETAKO 2. KONTROLA (2022-03-04)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA: 31

1.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \forall x<0\\[2mm] \dfrac{\sin(x)}{x} & \forall x\in(0,1]\\[2mm] \mathrm{L}(x-1) & \forall x>1\end{cases}$ **funtzioa emanik,** $I=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ **eta** $J=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ **integralak definitzen ditugu.**

a) Adieraz itzazu zeintzuk diren *I* integral inpropioaren puntu singularrak. Arrazoitu erantzuna.

b) Adieraz itzazu zeintzuk diren *J* integral inpropioaren puntu singularrak. Arrazoitu erantzuna.

c) Badakigu, kalkulatu barik, horietako integraletako bat ezin dela konbergentea izan. Zein? Arrazoitu erantzuna.

d) Kalkulatu $I=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ **integralaren balioa.**

(2.75 puntu)

a) $I=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{\sin(x)}{x}dx+\int_{1}^{2}\mathrm{L}(x-1)dx$

Puntu singularretako bat $-\infty$ da. Horrez gain,

$\forall x\in(-\infty,2]-\{0,1\}\quad f(x)\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow$ eremu horretan ez dago puntu singularrik.

$x=0$ eta $x=1$ puntuak aztertu behar dira:

$$\begin{cases}\nexists f(0)\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ puntu singularra da.}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)}{x}=1\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\exists f(1)=\sin(1)\in\mathbb{R} \text{ eta } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin(x)}{x}=\sin(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\mathrm{L}(x-1)=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1 \text{ puntu singularra da.}\end{cases}$$

Beraz, $I=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ integral inpropioaren puntu singularrak $-\infty$, $x=0$ eta $x=1$ dira.

b) $J = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx + \int_1^\infty \mathrm{L}(x-1)dx$

Puntu singularretako bat ∞ da. Horrez gain,

$\forall x \in (0,\infty)-\{0,1\} \quad f(x)\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow$ eremu horretan ez dago puntu singularrik

$$\left\{\begin{array}{l} \nexists f(0)\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ ez da puntu singularra.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \exists f(1) = \sin(1) \in \mathbb{R} \text{ eta } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sin(x)}{x} = \sin(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \mathrm{L}(x-1) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ puntu singularra da.} \end{array}\right.$$

Beraz, $J = \int_0^\infty f(x)dx$ integral inpropioaren puntu singularrak ∞ eta $x=1$ dira.

c) *I* eta *J* integralei konbergentea izateko baldintza beharrezkoa aplikatuko diegu:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \int_{-\infty}^2 f(x)dx$ konbergentea izan daiteke.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \mathrm{L}(x-1) = \infty \neq 0 \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty f(x)dx$ ezin da konbergentea izan.

d) $I = \int_{-\infty}^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx + \int_1^2 \mathrm{L}(x-1)dx = I_1 + I_2 + I_3$

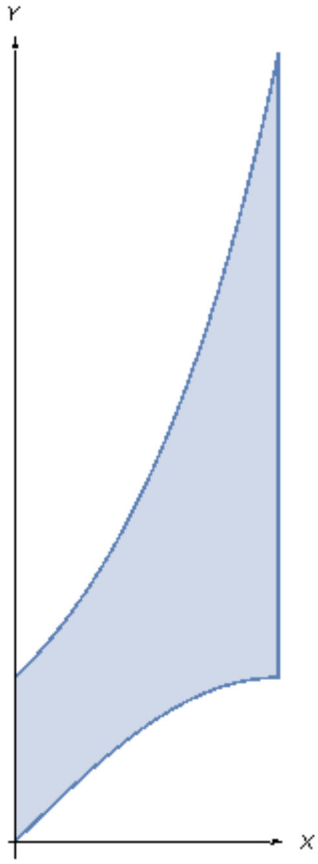
Hauetako bakoitza kalkulatuko dugu:

I_1 integralak bi puntu singular dituenez ($-\infty$ eta $x=0$), bitan banandu behar dugu:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-\infty}^{-1} - \frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{0} = 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} - 1 = \infty$$

Beraz, I_1 dibergentea da, eta, ondorioz, *I* ere dibergentea da.

2.- $y = \sin x$**,** $y = e^x$ **kurbek, eta,** $x = 0$ **eta** $x = \dfrac{\pi}{2}$ **zuzenek marrazkian erakusten den planoko eskualdea mugatzen dute.**



a) Eman ezazu eskualde horren adierazpen analitikoa.

b) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horren azalera.

c) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OX ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.

d) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OY ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.

(1.75 puntu)

a) $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \sin x \le y \le e^x \right\}$

b) Aurreko adierazpen analitikoa kontuan izanik, R eskualdearen azalera honela plantea daiteke:

$$\text{Azalera}(R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x - \sin x \right) dx$$

c) Era berean:

$$\text{Bolumena OX-ren inguruan biratzean} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2x} - \sin^2 x \right) dx$$

d) Eta, baita kasu honetan ere:

$$\text{Bolumena OY-ren inguruan biratzean} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(e^x - \sin x \right) dx$$