KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 2. KONTROLA (2024-02-27)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- Irakasle batek $\int_0^\infty \frac{dx}{(3-x)^2}$ integrala kalkulatzeko eskatu du. Ikasle batek hurrengo ebazpena egin du:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(3-x)^2} = \left.\frac{1}{3-x}\right|_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Ondo dago?

- **Baietz uste baduzu, aplikatu ikasleak egin duena $\int_0^\infty \frac{dx}{(x-2)^2}$ integrala kalkulatzeko.**
- **<u>Ezetz</u> uste baduzu, zuzendu eta egin zure ustez egin behar den bezala.**

(1.5 puntu)

Ikasleak egindako garapena ez da zuzena. Honela egin beharko luke:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(3-x)^2} = \int_0^\infty f(x)dx \quad \text{non} \quad f(x) = \frac{1}{(3-x)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty) - \{3\}$$

Eta $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$.

Beraz, integral inpropio honek bi puntu singular ditu, ∞ eta $x=3$. Orduan:

$$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^\infty f(x)dx = I_1 + I_2 + I_3$$

Eta *I* konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1, I_2, I_3 konbergenteak dira.

$$I_1 = \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2} = \left.\frac{1}{3-x}\right|_0^3 = \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1 \text{ dibergentea da.}$$

Beraz, *I* ere dibergentea da. $I = \infty$.

2.- <u>Marraztu</u> planoko R eskualdea, bere muga hurrengo kurbek osatzen dutelarik:

$$\boldsymbol{R}\text{ **–ren muga** } \equiv \begin{cases} (0,0) \textbf{ eta } (1,-1) \textbf{ puntuek definituriko zuzena} \\ (0,0) \textbf{ eta } (2,1) \textbf{ puntuek definituriko zuzena} \\ y = 2x - x^2 \textbf{ parabola} \end{cases}$$

Eta, <u>kalkulatu</u> bere azalera.

(2.5 puntu)

$(0,0)$ eta $(1,-1)$ puntuek definituriko zuzena $\equiv y = -x$

$(0,0)$ eta $(2,1)$ puntuek definituriko zuzena $\equiv y = \dfrac{x}{2}$

Eta, parabolaren eta zuzenen arteko ebaki-puntuak hauek dira:

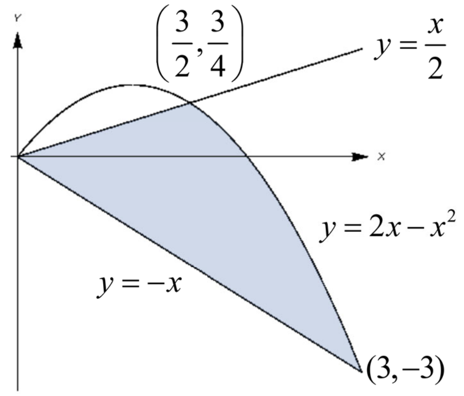
$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3x}{2} = x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ eta } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow -x = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ eta } (3,-3)$$

Beraz, R eskualdearen adierazpen analitikoa honako hau da:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le \frac{3}{2}, -x \le y \le \frac{x}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{3}{2} \le x \le 3, -x \le y \le 2x - x^2\right\}$$

Eta, bere grafikoa:



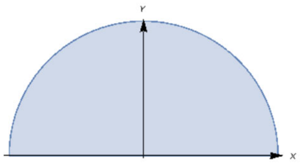
$$\text{Azalera}(R) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x}{2} - (-x)\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(2x - x^2 - (-x)\right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3x}{2} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(3x - x^2\right) dx =$$

$$= \left.\frac{3x^2}{4}\right|_0^{\frac{3}{2}} + \left.\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{27}{16} + \frac{27}{2} - 9 - \frac{27}{8} + \frac{9}{8} = \frac{27 + 216 - 144 - 54 + 18}{16} = \frac{63}{16}$$

3.- $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$ **planoko eskualdea emanik, zein ardatzekiko biratu beharko duzu esfera bat lortzeko? <u>Kalkulatu</u> esfera horren bolumena emango lukeen integrala.**

(Puntu 1)

R eskualdea zirkuluerdi hau da:



Esfera bat lortzeko, OX ardatzaren inguruan biratu behar dugu. Eta, bere bolumena hurrengo integralak emango du:

$$\text{Esferaren bolumena} = \int_{-1}^{1}\pi\left(1-x^2\right)dx = \pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$$