KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 3. KONTROLA

1.- f funtzioari buruz honako datu hauek ezagutzen dira:

f jarraitua da $\forall x \in (-\infty,0)\cup(0,5)\cup(5,\infty)$ eta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x)=4 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=6$$

Datu hauen arabera, eta, hurrengo integralak emanik,

$$I_1=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx \qquad I_2=\int_{4}^{\infty} f(x)dx$$

erantzun galdera hauek:

a) Integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, adierazi zeintzuk diren puntu singularrak, erantzuna justifikatuz.

b) Horietako integral bat ezin da konbergentea izan. Zein? Zergatik?

(0.75 puntu)

a) $I_1=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ integral inpropioa da:

$-\infty$ puntu singularra da

Eta $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ ere puntu singularra da

$I_2=\int_{4}^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioa da: ∞ puntu singular bakarra da.

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=0$ eta $\lim_{x\to 5^+} f(x)=4 \quad \Rightarrow \quad f$ mugatua da $x=5$ puntuan. Hau, beraz, ez da puntu singularra.

b) $I_2=\int_{4}^{\infty} f(x)dx$ ezin da konbergentea izan baldintza beharrezkoa betetzen ez baitu: $\lim_{x\to\infty} f(x)=6\neq 0$

2.- Kalkulatu $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$

(0.75 puntu)

$I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$ non $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}\in\mathbb{R} \quad \forall x\in[-1,3]-\{1\}$. Eta $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=1$ puntu singularra da.

$$I=\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx=I_1+I_2$$

Eta I konbergentea da $\Leftrightarrow I_1$ eta I_2 konbergenteak dira.

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_{-1}^{1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{-1-1} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1 \text{ dibergentea da}$$

Beraz, I dibergentea da: $I = \int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2} = \infty$

3.- Kalkulatu $y = \cos x$ kurbak eta $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ eta $x = \pi$ zuzenek mugaturiko eskualdearen azalera.

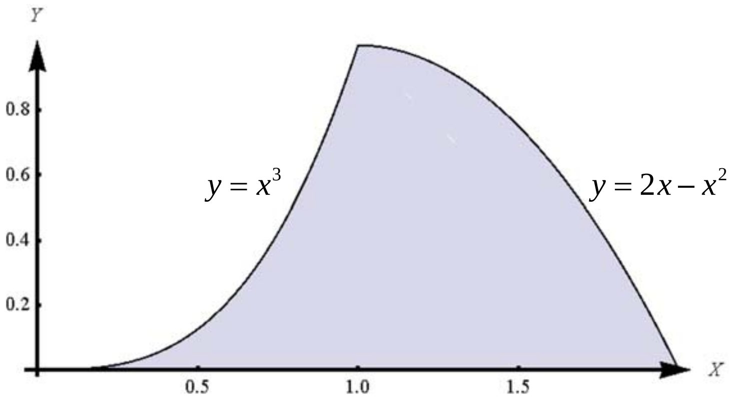
(Puntu 1)

$$\cos x \begin{cases} \geq 0 & \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \leq 0 & \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}, \text{ orduan:}$$

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \cos x \leq y \leq 0\right\}$$

Beraz, $Azalera(R) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

4.- Izan bedi marrazkian erakusten den planoko *R* eskualdea:



a) Planteatu, integral mugaturen bitartez, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena.

b) Planteatu, integral mugaturen bitartez, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena.

(0.5 puntu)

a) $Bol_{0X}(R) = \int_0^1 \pi\left(x^3\right)^2 dx + \int_1^2 \pi\left(2x - x^2\right)^2 dx$

b) $Bol_{0Y}(R) = \int_0^1 2\pi x \cdot x^3 dx + \int_1^2 2\pi x \cdot \left(2x - x^2\right) dx$