KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 3. KONTROLA

1.- Hurrengo lau integralak emanik:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x + x^3}\,dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx \qquad I_3 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\,dx \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-1}\,dx$$

erantzun galdera hauek:

a) Integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, adierazi zeintzuk diren puntu singularrak, erantzuna justifikatuz.

b) Kalkulatu lehenengo eta hirugarren integralen emaitza (I_1 eta I_3).

(2 puntu)

a) $I_1 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x + x^3}\,dx$ integral inpropioa da:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x^3} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty)$$

∞ puntu singular bakarra da.

$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$ integral inpropioa da:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (0,1]$$

Eta $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singular bakarra da.

$I_3 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\,dx$ integral inpropioa da:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty)$$

∞ puntu singular bakarra da.

$I_4 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-1}\,dx$ ez da integral inpropioa:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,1)$$

Eta $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1$ puntuan definituta ez egon arren, f mugatuta dago (eten gaindigarria du). Beraz, ez dago puntu singularrik.

b) $I_1 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x + x^3} dx$ integralari konbergentzi baldintza beharrezkoa aplikatuz gero:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 \text{ dibergentea da.}$$

Beraz, $I_1 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x + x^3} dx = \infty$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x^3} > 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$ baita.

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \arctan\left(e^x\right)\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \arctan\left(e^x\right) - \arctan\left(e^0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

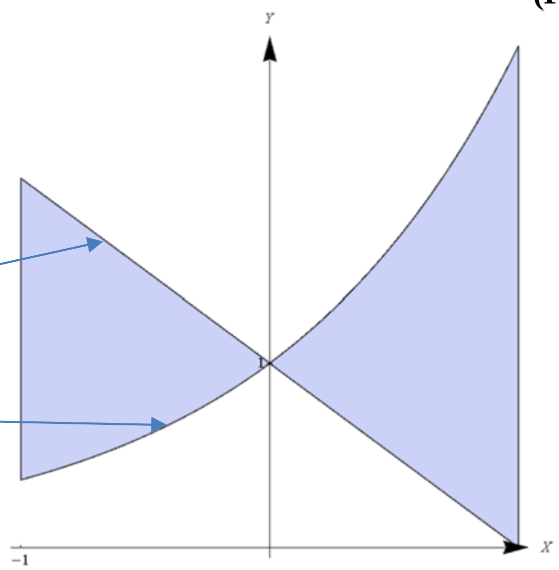
OHARRA:

Integrazio-tarteko mugaren bat ∞ (edo $-\infty$) bada, puntu hori BETI da puntu singularra, eta, ondorioz, integral inpropia dugu. Berdin da konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen den ala ez. Ariketa honetan, adibidez, I_1 eta I_3 integral inpropioak dira, bietan ∞ puntu singular bakarra izanik, eta, baldintza beharrezkoari dagokionez, lehenengo kasuan ez da betetzen, eta bigarrenean, berriz, betetzen da.

2.- Kalkulatu $y = e^x$ kurbak, eta, $y = 1 - x$, $x = -1$ eta $x = 1$ zuzenek mugatzen duten eskualdearen azalera.

(Puntu 1)

$y = e^x$ kurbak eta $y = 1 - x$ zuzenak elkar ebakitzen dute $(0,1)$ puntuan.



Orduan, analitikoki, R eskualdea honela adieraz daiteke:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le x \le 0,\, e^x \le y \le 1 - x\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\, 1 - x \le y \le e^x\right\}$$

Beraz,

$$Azalera(R) = \int_{-1}^{0} \left(1 - x - e^x\right) dx + \int_0^1 \left(e^x - 1 + x\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - e^x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(e^x - x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -1 + 1 + \frac{1}{2} + e^{-1} + e - 1 + \frac{1}{2} - 1 = e + \frac{1}{e} - 1$$

3.- Izan bedi $y=x^2$ parabolak, $y=4x-4$ zuzenak eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdea. Marraztu eskualde hori, eta, planteatu, integral mugaturen bitartez, <u>kalkulatu barik</u>,

a) OX ardatzaren inguruan biratzean, eskualde horrek sortutako solidoaren bolumena.

b) OY ardatzaren inguruan biratzean, eskualde horrek sortutako solidoaren bolumena.

(Puntu 1)

$y=x^2$ parabolaren eta $y=4x-4$ zuzenaren arteko ebakidura:

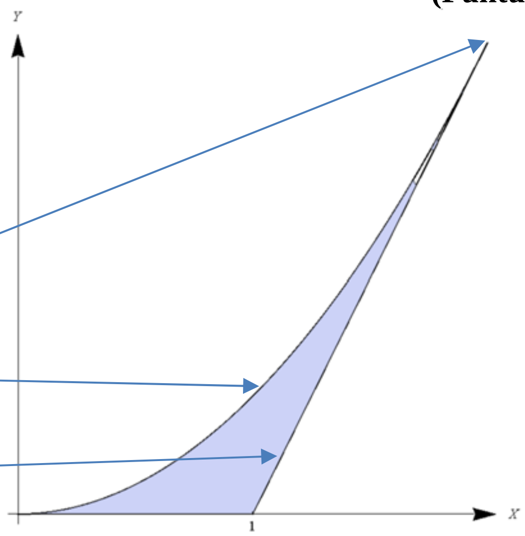
$$y=x^2=4x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

Hau da, elkar ebakitzen dute $(2,4)$ puntuan.

$$y=x^2 \quad \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} \quad x=\sqrt{y}$$

$$y=4x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y+4}{4}$$



Orduan, analitikoki, R eskualdea honela adieraz daiteke:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leq x\leq 1,\, 0\leq y\leq x^2\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,1\leq x\leq 2,\, 4x-4\leq y\leq x^2\right\}$$

Edo, baita honela ere:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leq y\leq 4,\, \sqrt{y}\leq x\leq \frac{y+4}{4}\right\}$$

a) $Bol_{0X}(R)=\int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2 dx+\int_1^2 \pi\left(\left(x^2\right)^2-(4x-4)^2\right)dx=\int_0^2 \pi x^4 dx-\int_1^2 \pi\left(4x-4\right)^2 dx$

Edo, $Bol_{OX}(R)=\int_0^4 2\pi y\left(\frac{y+4}{4}-\sqrt{y}\right)dy$

b) $Bol_{0Y}(R)=\int_0^1 2\pi x\cdot x^2 dx+\int_1^2 2\pi x\cdot\left(x^2-4x+4\right)dx=\int_0^2 2\pi x^3 dx-\int_1^2 2\pi x\cdot\left(4x-4\right)dx$

Edo, $Bol_{Oy}(R)=\int_0^4 \pi\left(\left(\frac{y+4}{4}\right)^2-y\right)dy$