KALKULUA (31Taldea) – MINTEGIETAKO 3. KONTROLA

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}x}{x} & \forall x \in (0,1) \\ \dfrac{1}{x^2} & \forall x \in [1,\infty) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) $\int_0^2 f(x)dx$ **integral inpropioa da? Baiezko kasuan, adieraz itzazu bere puntu singularrak.**

b) **Kalkula ezazu** $\int_0^2 f(x)dx$ **integralaren balioa.**

(Puntu 1)

a) $I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{L}x}{x}dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = I_1 + I_2$

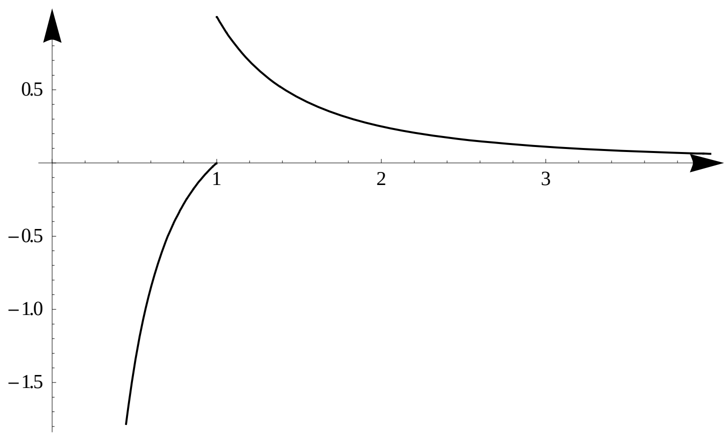
I_2 Riemann-en arabera definituriko integral mugatua da (integrazio-tartea finitua da, eta, integratzen dugun funtzioa mugatuta dago tarte horretan).

I_1, berriz, integral inpropioa da. Integrazio-tartea finitua da, baina integratzen dugun funtzioa ez dago mugatuta tarte horretan: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{L}x}{x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singularra da.

Beraz, *I* integral inpropioa da, eta, $x = 0$ puntu singular bakarra da.

b) $I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{L}x}{x}dx = \left.\frac{(\mathrm{L}x)^2}{2}\right|_0^1 = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad I_1$ dibergentea da, beraz, *I* ere dibergentea da, eta, bere balioa: $I = -\infty$.

OHARRA: Hona hemen *f* funtzioaren adierazpide grafikoa



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{L}x}{x} = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$

Eta, kontuz:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{L}x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

Hau da, ez dago indeterminaziorik (beraz, ezin da L´Hopital erabili)

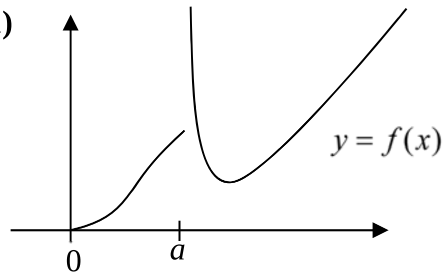
2.- $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioari buruz honako informazio hau ezagutzen da:

a) Konbergentea da

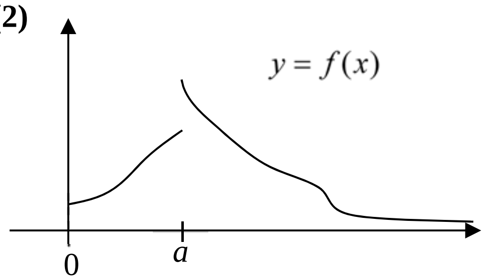
b) Bi puntu singular baino ez ditu

Hurrengo lau grafikoetatik, zeinek bete ditzake aurreko baldintza biak? Justifika ezazu erantzuna (grafika bakoitzerako, azter ezazu baldintza biak betetzen diren ala ez).

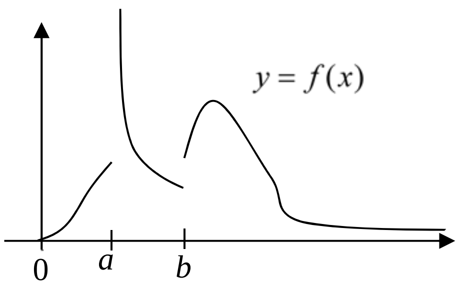
(1)



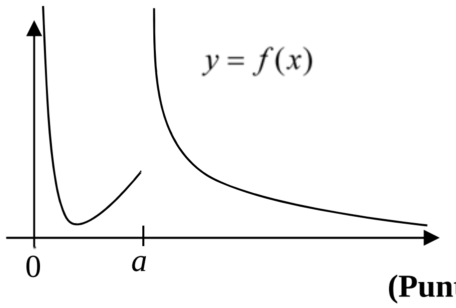
(2)



(3)



(4)



(Puntu 1)

(1) Grafikoaren arabera, $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioak bi puntu singular ditu: ∞ eta $x = a$ $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty\right)$. Baina integrala ezin da konbergentea izan, konbergentziarako baldintza beharrezkoa betetzen ez baita: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(2) Grafikoaren arabera, $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioak puntu singular bakarra du: ∞

(3) Grafikoaren arabera, $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioak bi puntu singular ditu: ∞ eta $x = a$ $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty\right)$. Eta, konbergentea izan daiteke, baldintza beharrezkoa betetzen baita: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(4) Grafikoaren arabera, $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integral inpropioak hiru puntu singular ditu: ∞, $x = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty\right)$ eta $x = a$ $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty\right)$.

Beraz, baldintza biak (3) grafikoak bakarrik betetzen ditu.

3.- Izan bedi OY ardatzak, $y = x^2$ kurbak, eta, $y = 2x - 1$ zuzenak mugatzen duten planoko *R* eskualdea.

a) Adieraz ezazu analitiko eta grafikoki eskualde hori.

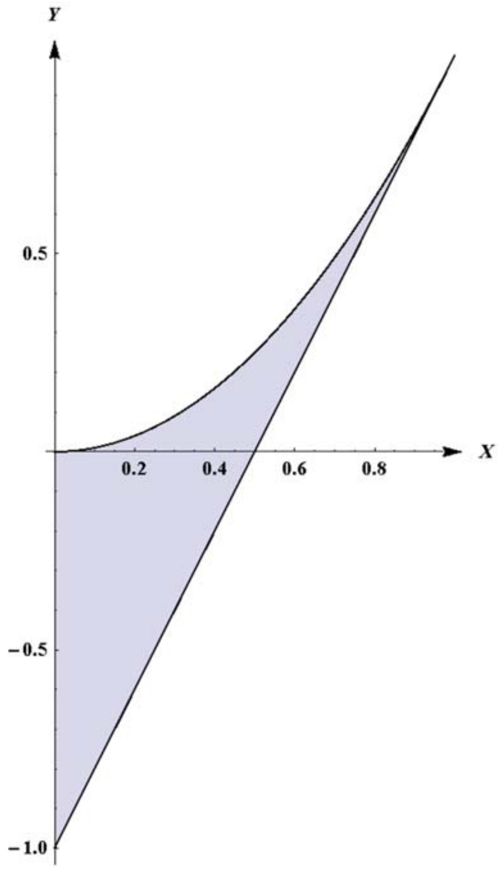
b) Kalkula ezazu eskualde horren azalera.

(Puntu 1)

a) $y = x^2$ kurbaren eta $y = 2x - 1$ zuzenaren arteko ebakidura:

$$y = x^2 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1,\ 2x - 1 \le y \le x^2\right\}$$



b) $\text{Azalera}(R) = \int_0^1 \left(x^2 - (2x-1)\right) dx = \int_0^1 (x-1)^2\, dx = \left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

4.- Izan bedi hurrengo erara definituriko planoko *R* eskualdea:

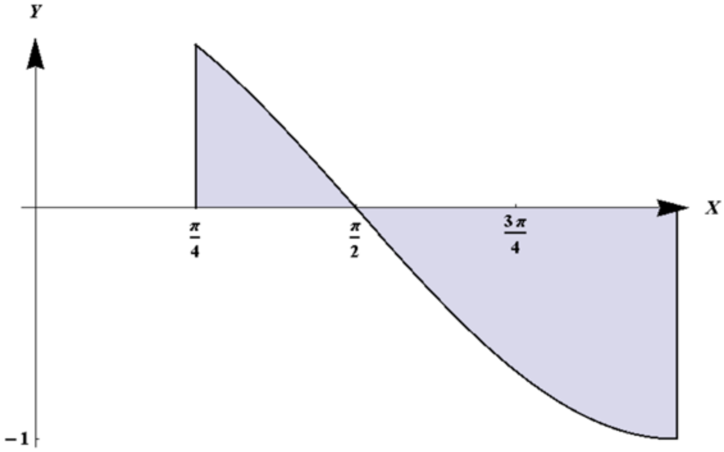
$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2},\,0\le y\le\cos x\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,\frac{\pi}{2}\le x\le\pi,\,\cos x\le y\le 0\right\}$$

Marra ezazu eskualde hori, eta, plantea ezazu, integral mugaturen bitartez, <u>kalkulatu barik</u>,

a) OX ardatzaren inguruan biratzean, eskualde horrek sortutako solidoaren bolumena.

b) OY ardatzaren inguruan biratzean, eskualde horrek sortutako solidoaren bolumena.

(Puntu 1)



a) Bolumena OX-ren inguruan biratzean $=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^2 x dx$

b) Bolumena OY-ren inguruan biratzean $=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\cos x dx\right)$