KALKULUA (31 Taldea) – MINTEGIETAKO 3. KONTROLA

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA: 31

1.- a) Zeintzuk dira $\int_{-\infty}^{0} e^{1/x} dx$ eta $\int_{0}^{\infty} e^{1/x} dx$ integral inpropioen puntu singularrak? Justifikatu erantzuna.

b) <u>Ez dakigu</u> $\int e^{1/x} dx$ integrala <u>kalkulatzen</u>, baina badakigu, hala ere, aurreko integral biak ezin direla konbergenteak izan (ez dute balio finiturik, alegia). Zergatik?

(Puntu 1)

a) $\int_{0}^{\infty} e^{1/x} dx$ integral inpropioak bi puntu singular ditu:

Integrazio-tarteko goiko muga: ∞

Eta, $x = 0$, funtzioa mugatuta ez dagoelako puntu horretan: $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$.

$\int_{-\infty}^{0} e^{1/x} dx$ integral inpropioak puntu singular bakarra du:

Integrazio-tarteko beheko muga: $-\infty$

Kasu honetan, $e^{1/x}$ funtzioa $x = 0$ puntuan definituta ez egon arren, $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$, beraz ez da puntu singularra.

b) Aurreko bi integralek ez dute konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen:

$$\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1 \neq 0 \text{ eta } \lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1 \neq 0$$

Beraz, ezin dira konbergenteak izan.

2.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \forall x \le -1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & \forall x \in (-1,0) \\ e^{-x} & \forall x \ge 0 \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ **integral inpropioa emanik, adieraz itzazu bere puntu singularrak, erantzuna justifikatuz.**

b) Kalkula ezazu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ **integralaren balioa.**

(2 puntu)

a) $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}+\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=I_1+I_2+I_3$

I_1 integral inpropioa da, integrazio-tarteko beheko muga $-\infty$ baita (puntu singularra).

I_2 integral inpropioa da. Integrazio-tartea finitua da, baina integratzen dugun funtzioa ez dago mugatuta tarte horretan: $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\infty \quad \Rightarrow \quad x=-1$ puntu singularra da.

I_3 integral inpropioa da, integrazio-tarteko goiko muga ∞ baita (puntu singularra).

Beraz, *I* integral inpropioa da, eta, hiru puntu singular ditu: $-\infty$, $x=-1$ eta ∞.

b) $I_1=\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-\infty}^{-1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad I_1$ konbergentea da.

$I_2=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}\Big|_{-1}^{0}=2 \quad \Leftrightarrow \quad I_2$ konbergentea da.

$I_3=\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=1 \quad \Leftrightarrow \quad I_3$ konbergentea da.

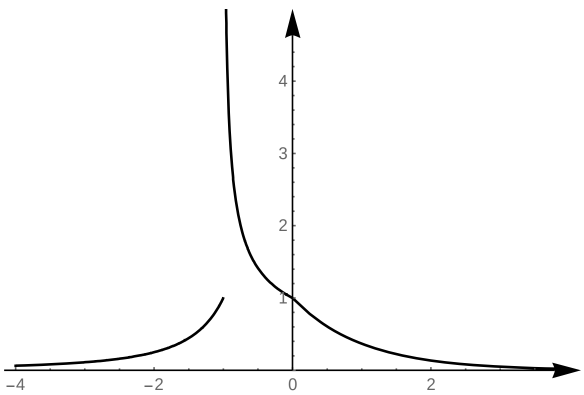
Beraz, *I* konbergentea da: $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1+2+1=4$

OHARRA:

Konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen da:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$



3.- Izan bedi OX ardatzak, $y=\sqrt{x}$ kurbak, eta, $(-1,0)$ eta $(1,1)$ puntuek definituriko zuzenak mugatzen duten planoko *R* eskualdea.

a) Adieraz ezazu analitiko eta grafikoki eskualde hori.

b) Kalkula ezazu eskualde horren azalera.

(2 puntu)

a) $(-1,0)$ eta $(1,1)$ puntuek definituriko zuzenaren ekuazioa $y=\dfrac{x+1}{2}$ da.

$y=\sqrt{x}$ kurbaren eta $y=\dfrac{x+1}{2}$ zuzenaren arteko ebakidura:

$$y=\sqrt{x}=\frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{(x+1)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2=x^2+2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-2x-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm4}{6}=\begin{cases}1 & \Rightarrow \quad y=1\\ -\dfrac{1}{3}<0 & \text{(ez du balio)}\end{cases} \quad \Rightarrow$$

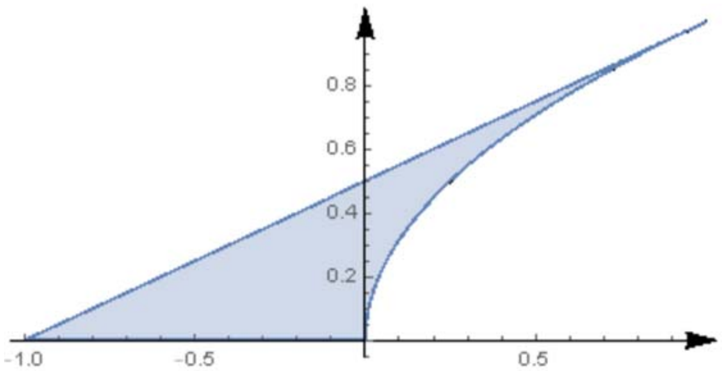
$(1,1)$ ebaki-puntua da. Berez, kurbaren eta zuzenaren arteko ukitze-puntua da.

Analitikoki, *R* eskualdea bi eratan adieraz daiteke:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le x\le 0,\, 0\le y\le \frac{x+1}{2}\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 1,\, \sqrt{x}\le y\le \frac{x+1}{2}\right\}$$

Edo, $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le y\le 1,\, 2y-1\le x\le y^2\right\}$

Eta, bere grafikoa:

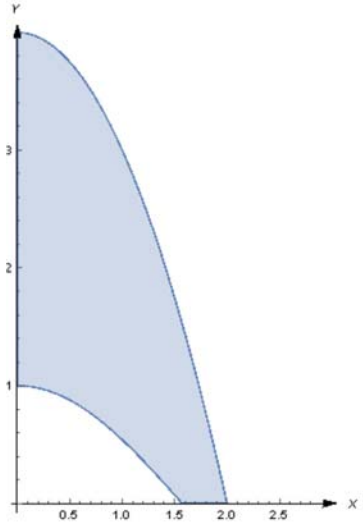


b) Aurreko bi adierazpen analitikoak kontuan izanik, *R* eskualdearen azalera bi eratan ere kalkula daiteke:

$$\text{Azalera}(R)=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{2}dx-\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx=\left.\frac{(x+1)^2}{4}\right|_{-1}^{1}-\left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_{0}^{1}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\text{Edo, Azalera}(R)=\int_{0}^{1}\left(y^2-2y+1\right)dy=\int_{0}^{1}(y-1)^2dy=\left.\frac{(y-1)^3}{3}\right|_{0}^{1}=0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

4.- $y = 4 - x^2$ **parabolak eta** $y = \cos x$ **kurbak lehenengo koadrantean marrazkian erakusten den planoko eskualdea mugatzen dute.**



a) **Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OX ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.**

b) **Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OY ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.**

(Puntu 1)

$y = 4 - x^2 = 0 \quad (x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Eta, $y = 4 - x^2,\, 0 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{4-y},\, 0 \leq y \leq 4$

$y = \cos x = 0 \quad (0 \leq x \leq 2) \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Eta, $y = \cos x,\, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \arccos y,\, 0 \leq y \leq 1$

Beraz,

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\, \cos x \leq y \leq 4 - x^2 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 4 - x^2 \right\}$$

Edo,

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq y \leq 1,\, \arccos y \leq x \leq \sqrt{4-y} \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq y \leq 4,\, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \right\}$$

a) Bolumena OX-ren inguruan biratzean $= \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx - \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

Edo, Bolumena OX-ren inguruan biratzean $= 2\pi \int_0^4 y\sqrt{4-y}\, dy - 2\pi \int_0^1 y \cdot \arccos y \, dy$

b) Bolumena OY-ren inguruan biratzean $= 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx - 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

Edo, Bolumena OY-ren inguruan biratzean $= \pi \int_0^4 (4 - y) dy - \pi \int_0^1 (\arccos y)^2 \, dy$

OHARRA: $1{,}5 \neq \dfrac{\pi}{2}$