KALKULUA (31 Taldea) – MINTEGIETAKO 3. KONTROLA (2021-02-25)

| |
|---|
| IZEN-ABIZENAK: |
| TALDEA: 31 |

**1.- Kalkulatu** $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx$

**(Puntu 1)**

Integral hau inpropioa da, eta, $\infty$ puntu singular bakarra dauka.

Baldintza beharrezkoa erabiliz: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\left(x\ll e^{x^2}\right)}{=} 0$

Betetzen da, beraz integrala konbergentea izan daiteke. Eta, kalkulatuko dugu:

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}\Bigg|_0^\infty = -\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

**2.-** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1} & \forall x \le 0 \\ \\ \dfrac{e^x - 1}{x^2} & \forall x > 0 \end{cases}$ **funtzioa emanik, adierazi zeintzuk diren** $\int_{-1}^\infty f(x)dx$ **integral inpropioaren puntu singularrak. Konbergentea izan daiteke integral hori? Arrazoitu erantzunak.**

**(1.5 puntu)**

$\int_{-1}^\infty f(x)dx$ integral inpropioaren puntu singularretako bat $\infty$ da. Horrez gain,

$\forall x \in (-1,0)\cup(0,\infty) \quad f(x)\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow$ eremu horretan ez dago puntu singularrik.

$x=-1$ eta $x=0$ puntuak aztertu behar dira:

$\begin{cases} \nexists f(-1)\in\mathbb{R} \\ \text{baina, } \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1} = 1 \in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ $x=-1$ ez da puntu singularra.

$\begin{cases} \exists f(0) = \sin(1)\in\mathbb{R} \text{ eta } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)} = \sin(1) \\ \\ \text{baina, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{L}\left(e^x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = \infty \end{cases} \Rightarrow$ $x=0$ puntu singularra da.

Bestalde, konbergentea izateko baldintza beharrezkoa erabiliz:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{(x^2 \ll e^x)}{=} \infty \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{\infty} f(x)dx$$ ezin da konbergentea izan.

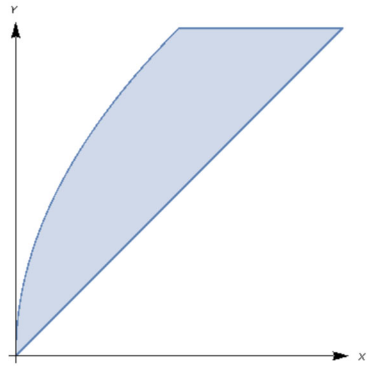
**3.- $y = x$ eta $y = 2$ zuzenek, eta $y = 2\sqrt{x}$ kurbak, marrazkian erakusten den planoko eskualdea mugatzen dute.**

**a) Eman ezazu eskualde horren adierazpen analitikoa.**

**b) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horren azalera.**

**c) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OX ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.**

**d) Plantea ezazu, <u>kalkulatu barik</u>, eskualde horrek OY ardatzaren inguruan biratzean sortuko duen solidoaren bolumena.**




**(2 puntu)**

a) Eskualdearen adierazpen analitikoa lortzeko, muga osatzen duten hiru zatien ebaki-puntuak identifikatu behar ditugu:

$y = x$ eta $y = 2$ zatien arteko ebaki-puntua (2,2) puntua da.

$y = 2$ eta $y = 2\sqrt{x}$ zatien arteko ebaki-puntua:

$$y = 2\sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,2) \text{ puntua da}$$

Eta, $y = x$ eta $y = 2\sqrt{x}$ zatien arteko ebaki-puntua, marrazkian erraz ikusten denez, (0,0) da:

$$y = 2\sqrt{x} = x \quad \Rightarrow \quad 4x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = 4 \Rightarrow (4,4) \text{ baina puntu hau} \\ \text{ez dago eskualde honetan} \end{cases}$$

Orduan:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 2\sqrt{x}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \le x \le 2,\, x \le y \le 2\right\}$$

Edo, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 2,\, \frac{y^2}{4} \le x \le y\right\}$

b) Aurreko bi adierazpen analitikoak kontuan izanik, $R$ eskualdearen azalera bi eratan plantea daiteke:

$$\text{Azalera}(R) = \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - x\right)dx + \int_1^2 (2-x)dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^2 2dx - \int_0^2 xdx$$

$$\text{Edo, Azalera}(R) = \int_0^2 \left( y - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

c) Hemen ere bi aukera ditugu:

$$\text{Bolumena OX-ren inguruan biratzean} = \pi \left( \int_0^1 4xdx + \int_1^2 4dx - \int_0^2 x^2 dx \right)$$

$$\text{Edo, Bolumena OX-ren inguruan biratzean} = 2\pi \int_0^2 y \left( y - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

b) Eta, baita kasu honetan ere:

$$\text{Bolumena OY-ren inguruan biratzean} = 2\pi \left( \int_0^1 2x\sqrt{x}dx + \int_1^2 2xdx - \int_0^2 x^2 dx \right)$$

$$\text{Edo, Bolumena OY-ren inguruan biratzean} = \pi \int_0^2 \left( y^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy$$