Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira 1. zatia

Azterketak 9 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 18 puntu dira eta azterketa gainditzeko 9 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Kalkulatu hurrengo segidaren limitea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2}$$

(Puntu 1)

b) Kalkulatu hurrengo funtzioen limiteak:

b.1) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}$

b.2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(1.5 puntu)

a) 1. Metodoa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2}\underset{\substack{\uparrow\\ Stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{[4+9+14+...+(5n-6)+(5n-1)]-[4+9+14+...+(5n-6)]}{n^2-(n-1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n-1}=\frac{5}{2}$$

2. Metodoa: zenbakitzailea progresio aritmetikoaren lehenengo n gaien batura da:

$$4+9+14+\ldots+(5n-1)=S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{4+(5n-1)}{2}\cdot n=\frac{5n^2+3n}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{2n^2}=\frac{5}{2}$$

b.1) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}=1^\infty=l\Leftrightarrow \mathrm{L}l=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sin^2 x}\cdot \mathrm{L}(1-x)\sim\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{x^2}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\pm\infty\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}=e^{-\infty}=0\\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}=e^{\infty}=\infty\end{array}\right.\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}$$

b.2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=-\infty$

2.- Estudiatu hurrengo zenbaki-seriearen izaera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot (2n-1)\cdot n!}$$

(2 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n (2n-1) n!} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D'Alembert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)(n+1)!}}{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n (2n-1) n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n-1)}{2(2n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n-3}{4n^2+6n+2} = 1$$

Kasu zalantzakoa. Orain Raabe-Duhamel-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot \left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n-3}{4n^2+6n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{2} < 1$$

Beraz, serie dibergentea dugu.

3.- $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ funtzioa emanik, honako hau eskatzen da:

a) Aurkitu definizio-eremua.
b) Kalkulatu asintotak.
c) Estudiatu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

(2 puntu)

a) $D=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x-1\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\left\{0\right\}$

b) Asintota bertikalak:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=0 \text{ asintota bertikala da.}$$

Asintota horizontalak:

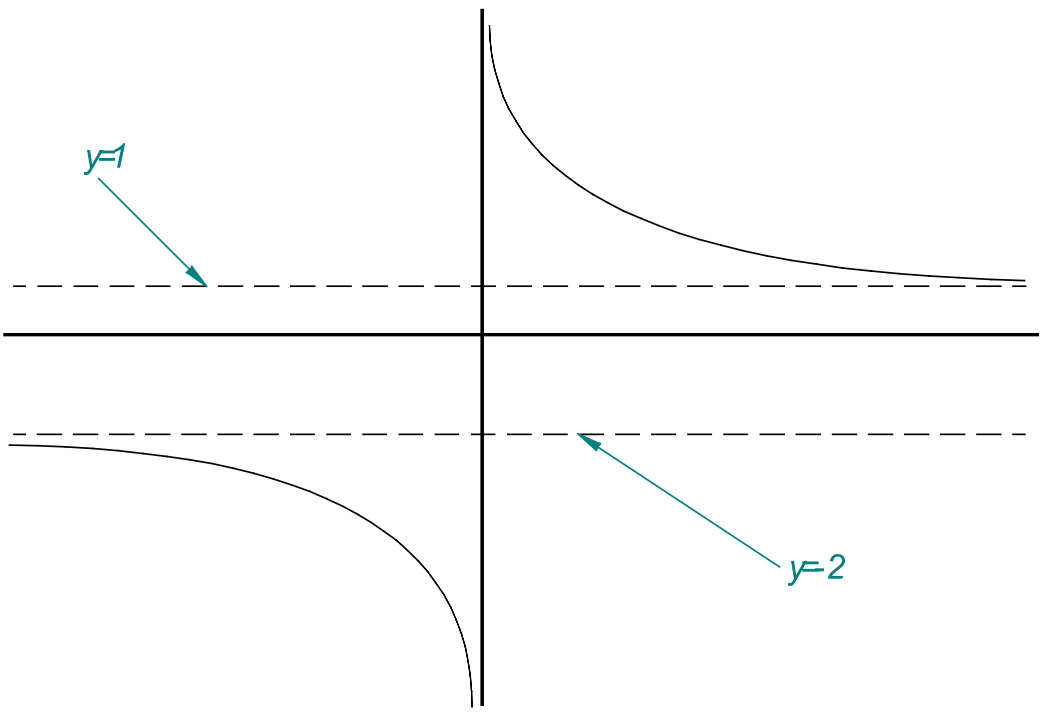
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\Rightarrow y=1 \text{ asintota horizontala da.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\frac{2}{-1}=-2\Rightarrow y=-2 \text{ asintota horizontala da.}$$

Eta ez dago asintota zeiharrik.

c) $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0\quad\forall x\in D\Leftrightarrow f$ beherakorra da $\forall x\in D$

d)



4.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases} a-1+\sin x & \forall x\geq 0 \\ \dfrac{ax}{2-x} & \forall x<0 \end{cases}$ funtzioa, non $a\in\mathbb{R}$. Kalkulatu $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

(2 puntu)

$\forall x\neq 0$ deribatua zuzenean ateratzen da deribazio erregelak aplikatuz:

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & \forall x>0 \\ \dfrac{2a}{(2-x)^2} & \forall x<0 \end{cases}$$

$x=0$ puntuko deribagarritasuna aztertzeko bi eratan egin daiteke.

1. Metodoa: Definizioa erabiliz:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{a-1+\sin h-(a-1-0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{a\cdot h}{2-h}-(a-1-0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah-(a-1)(2-h)}{h(2-h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2ah-h-2a+2}{h(2-h)}=$$

$$=\begin{cases} \text{Baldin } a>1\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\dfrac{1-a}{h}=+\infty\Rightarrow \text{Ez da deribagarria finitua ez baita} \\ \text{Baldin } a<1\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\dfrac{1-a}{h}=-\infty\Rightarrow \text{Ez da deribagarria finitua ez baita} \\ \text{Baldin } a=1\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\dfrac{ah}{2h}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(0^+)\neq f'(0^-)\Rightarrow \text{Ez da deribagarria} \end{cases}$$

Beraz, *f* ez da deribagarria $x=0$ puntuan $\forall a\in\mathbb{R}$.

2. Metodoa: Ikus dezagun *f* jarraitua ba ote den $x=0$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a-1+\sin x)=a-1=f(0) \\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{2-x}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ jarraitua } x=0 \text{ puntuan} \Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$$

Beraz, $\forall a\neq 1$ *f* ezin da deribagarria izan.

Eta

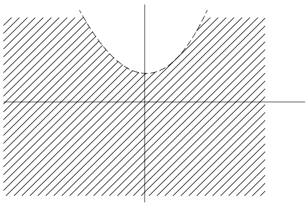
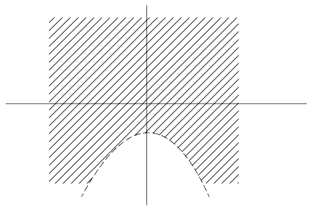
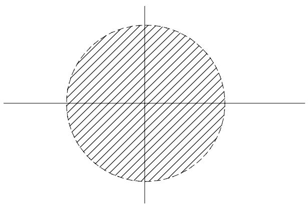
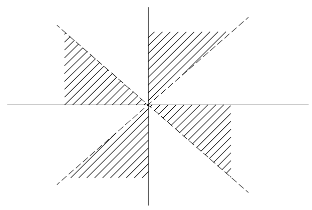
$$a=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \sin x & \forall x\geq 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \forall x<0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\sin h}{h}=1 \\ f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\dfrac{h}{h(2-h)}=\lim_{h\to 0^-}\dfrac{1}{(2-h)}=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow \nexists f'(0)$$

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki honako funtzio honen definizio-eremua:

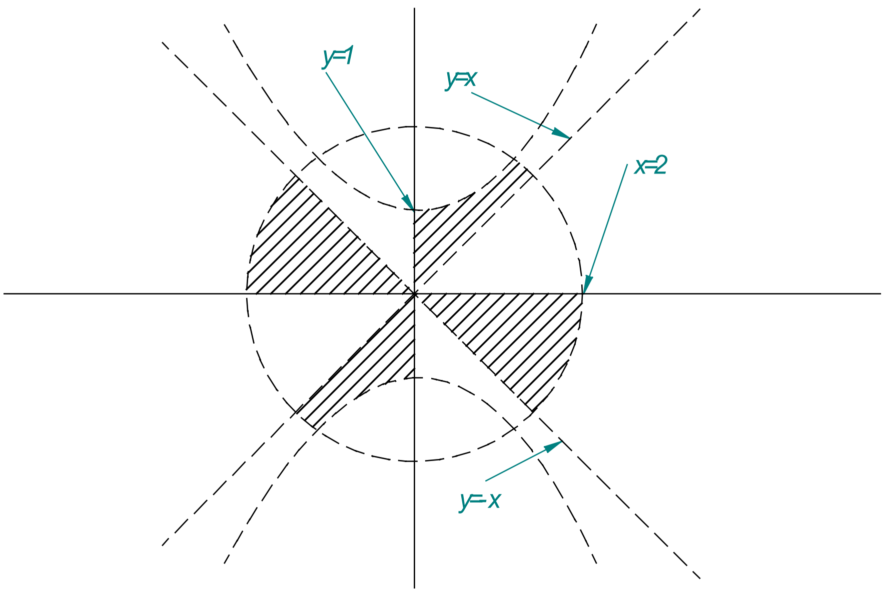
$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(x^2-y+1)+\mathrm{L}(x^2+y+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\mathrm{L}\left(\frac{|y|-|x|}{xy}\right)$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-y+1>0,\ x^2+y+1>0,\ 4-x^2-y^2>0,\ \frac{|y|-|x|}{xy}>0\right\}$$

<table>
<tr>
<td>a)
$x^2-y+1>0 \Rightarrow y<x^2+1 \Rightarrow$
</td>
<td>b) $x^2+y+1>0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $4-x^2-y^2>0$
</td>
<td>d)
$$\frac{|y|-|x|}{xy}>0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} |y|-|x|>0 \\ xy>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 & y>0 \\ x<0 & y<0 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} |y|-|x|<0 \\ xy<0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 & y<0 \\ x<0 & y>0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$
</td>
</tr>
</table>

Aurreko zatien ebakidurak, beraz, definizio-eremua ematen digu:



Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Guztira 2. zatia

Azterketak 9 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 18 puntu dira eta azterketa gainditzeko 9 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

6.- a) Aurkitu $f(x)=\dfrac{x^2}{8+x^3}$ funtzioaren berredura-seriezko garapena non den baliozkoa adieraziz.

b) Lortu, <u>deribatu gabe</u>, $f''(0)$ eta $f^{v)}(0)$.

(2 puntu)

a) f serie geometrikoaren batura da:

$$f(x)=\frac{x^2}{8+x^3}=\frac{\frac{x^2}{8}}{1+\frac{x^3}{8}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{8}\cdot\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{2^{3n+3}}$$

Eta baliozkoa da:

$$\forall x\in\mathbb{R}/\,|r|=\left|-\frac{x^3}{8}\right|<1\Leftrightarrow|x|^3<8\Leftrightarrow|x|<\sqrt[3]{8}\Leftrightarrow -2<x<2\Leftrightarrow x\in(-2,2)$$

b) Aurreko berredura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea dela kontuan izanik:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{2^{3n+3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Orduan,

$$n=0\Rightarrow\frac{x^2}{2^3}=\frac{f''(0)}{2!}x^2\Rightarrow f''(0)=\frac{1}{4}$$

$$n=1\Rightarrow-\frac{x^5}{2^6}=\frac{f^{V)}(0)}{5!}x^5\Rightarrow f^{V)}(0)=-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{64}=-\frac{15}{8}$$

7.- $z = f(x, y)$ funtzioa emanik, adierazi, erantzuna arrazoituz, hurrengo baiteztapenak egiazkoak edo gezurrezkoak diren:

a) Baldin $f'_x(0,0) = 0$ eta $f'_y(0,0) = \infty \Rightarrow f$ ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

b) Baldin limite direkzionalak $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ y=m(x-1)\,\forall m\in\mathbb{R}}} f(x, y) = f(1,0) \Rightarrow f$ jarraitua da $(1,0)$ puntuan.

c) Izan bedi f diferentziagarria P_0 puntuan. $\vec{u} = (-1,1)$ bektorea emanik, baldin $f'_x(P_0) = -a$ eta $f'_y(P_0) = b \Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0} = a + b$.

(1.5 puntu)

a) Egiazkoa da. f diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoa deribatu partzial finituak izatea da, eta kasu honetan ez da betetzen, beraz *f* ezin da diferentziagarria izan.

b) Gezurrezkoa da. Limite direkzionalak zuzenetan zehar berdinak badira ere (eta funtzioaren balioarekin bat badatoz ere), horrek ez du esan nahi limite bikoitzak gauza bera betetzen duenik. Beraz, ezin da egiaztatu *f* jarraitua denik puntu horretan.

c) Gezurrezkoa da. Deribatu direkzionalaren balioa $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0} = -a \cdot h_1 + b \cdot h_1$, non $\vec{u} = (h_1, h_2)$ unitarioa den. Eta kasu honetan ez zen horrelakoa. Emaitza zuzena $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0} = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ litzateke.

8.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+y^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

a) Estudiatu bere diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

b) Kalkulatu $f''_{y^2}(0,0)$.

(2 puntu)

a) Jarraitasuna aztertuz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+1)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta(\rho\sin\theta+1)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos^2\theta(\rho\sin\theta+1) = \varphi(\theta) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+y^2} \Rightarrow f$ ez da jarraitua $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow f$ ezin da diferentziagarria izan $(0,0)$ puntuan.

Edo deribatu partzialak kalkulatzen baditugu:

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}=\pm\infty \Rightarrow$ Deribatu partzial finitua existitzen ez denez, f ezin da diferentziagarria izan $(0,0)$ puntuan.

b) $f''_{y^2}(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f'_y(0,0+k)-f'_y(0,0)}{k}$

Beraz, hasteko, f-ren y-rekiko lehenengo deribatu partziala kalkulatu behar dugu:

$\forall(x,y)\neq(0,0) \quad f'_y(x,y)=\dfrac{x^4-x^2y^2-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0$

Hau da, $f'_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-x^2y^2-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Eta orain eskatzen digutena:

$$f''_{y^2}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f'_y(0,0+k)-f'_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^4}-0}{k}=0$$

9.- Irakasle batek badaki gaindituen kopurua (w) bi aldagairen mendean dagoela, irakaslea klasera ez den joaten orduak (u) eta zelan azaltzen duen (v):

$$w = v \cdot f(u \cdot v)$$

f diferentziagarria izanik. Horrez gain, badaki u eta v beste bi aldagairen mende daudela, Athleticek zelan jokatzen duen (x) eta Interneten ibilitako orduak (y):

$$\begin{cases} u = -2x + 2y \\ v = 4x \end{cases}$$

Zein da gaindituen kopuruaren aldakuntza maximoa baldin $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $f(2) = 1$ eta $f'(2) = 1$?

(2 puntu)

Emandako funtzioen arteko erlazioak honako hauek dira:

$$\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\rangle w = v \cdot f\left\langle \begin{array}{l} v - x \\ f - t\left\langle \begin{array}{l} u\left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \\ v - x \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \text{non} \qquad t = u \cdot v$$

Eta kalkulatu behar duguna $\left|\vec{\nabla} w\left(\frac{1}{2},1\right)\right| = \sqrt{\left[w'_x\left(\frac{1}{2},1\right)\right]^2 + \left[w'_y\left(\frac{1}{2},1\right)\right]^2}$.

$$w'_x = v'.f + v \cdot f' \cdot (v \cdot u'_x + u \cdot v') \Rightarrow w'_x\left(\frac{1}{2},1\right) = 4f(2) + 2f'(2) \cdot (-2 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 4$$

$$w'_y = v \cdot f' \cdot v \cdot u'_y = v^2 \cdot f' \cdot u'_y \Rightarrow w'_y\left(\frac{1}{2},1\right) = 2^2 \cdot f'(2) \cdot 2 = 8$$

Orduan, $\left|\vec{\nabla} w\left(\frac{1}{2},1\right)\right| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$