Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e-1}{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{e^{1/2}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{e^{1/3}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{e^{1/n}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{2n}\right)}}$

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e-1}{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{e^{1/2}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{e^{1/3}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{e^{1/n}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{2n}\right)}} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\arcsin\left(\frac{1}{2n}\right)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(e^{1/n}\right)}{\frac{1}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2n \cdot \frac{1}{n} \cdot \mathrm{L}e = 2$$

(1) Bataz besteko geometrikoaren irizpidea.

2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{an+2}\right)^{\frac{2n^3+1}{n^2+2}}$, $a>0$ izanik.

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{an+2}\right)^{\frac{2n^3+1}{n^2+2}} = \left(\frac{3}{a}\right)^{\infty} = \begin{cases} \infty & \forall a<3 \\ 0 & \forall a>3 \\ 1^{\infty} & a=3 \end{cases}$$

Baldin $a=3 \;\Rightarrow\; l=1^{\infty}$. Logaritmoak hartuz:

$$\mathrm{L}l = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{n^2+2} \cdot \mathrm{L}\left(\frac{3n+5}{3n+2}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^2}\left(\frac{3n+5}{3n+2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} 2n \frac{3n+5-3n-2}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{3n+2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l = e^2$$

3.- Determinatu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{1+a^n}$ seriearen izaera, $a \geq 0$ parametroaren balioen arabera.

(1.5 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n^a}{1+a^n} \geq 0 \quad \forall n$

Baldin $a = 0 \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $0 < a < 1 \Rightarrow a_n \sim n^a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $a = 1 \Rightarrow a_n = \frac{n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $a > 1$ D`Alembert aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^a\cdot(1+a^n)}{(1+a^{n+1})\cdot n^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

4.- Aztertu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n+3)}{(3n-3)\cdot 3^n\cdot n!}$ seriearen izaera.

(1.5 puntu)

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n+3)}{(3n-3)\cdot 3^n\cdot n!} \geq 0 \quad \forall n$.

D`Alembert erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n+3)\cdot(3n+6)}{3n\cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{(3n-3)\cdot 3^n\cdot n!}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+6)(3n-3)}{3n\cdot 3(n+1)} = 1 \Rightarrow$$

Raabe-Duhamel aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(3n+6)(3n-3)}{3n\cdot 3(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{n^2+n-n^2-n+2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

5.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n$ berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura.

(1.5 puntu)

Balio absolutuen serieari D`Alembert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)\cdot|x|^{n+1}}{(2n+2)\cdot|x|^n}=|x|<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\Rightarrow R=1$ (Konbergentzi erradioa)

$x=1$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)$ dibergentea da.

$x=-1$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n+2)$ ez da konbergentea.

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n$ konbergentea da (absolutuki) $\forall x\in(-1,1)$. Hortaz:

$$\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n \quad \forall x\in(-1,1)$$

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean $\forall x\in(-1,1)$:

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}2x^{n+1}\overset{(1)}{=}\frac{2x^2}{1-x} \quad \forall x\in(-1,1)$$

Emaitza hau deribatuz:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n=\left(\frac{2x^2}{1-x}\right)'=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2} \quad \forall x\in(-1,1)$$

(1) Serie geometrikoa da: $r=x$.

6.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura.

(1.5 puntu)

Balio absolutuen serieari D`Alembert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{2^n \cdot |x|^n} = 2|x| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ (Konbergentzi erradioa)

$x = \frac{1}{2}$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da.

$x = -\frac{1}{2}$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ baldintzaz konbergentea da (Leibniz).

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ konbergentea da $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Hau da:

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Eta deribagarria da $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^{n-1} \overset{(1)}{=} \frac{2}{1-2x} \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Emaitza hau integratuz ($S(0) = 0$):

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = \int_0^x \frac{2}{1-2t} dt = -\mathrm{L}(1-2x) = f(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Baina $x = -\frac{1}{2}$ puntuan $\exists S(x)$ eta $\exists f(x)$ jarraituak. Orduan:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = -\mathrm{L}(1-2x) \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(1) Serie geometrikoa da: $r = 2x$.

7.- Azaldu hurrengo baieztapenak zuzenak diren ala ez:

a) $a>0$ suposatuz, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ konbergentea da $\Leftrightarrow a>1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}5a_n$ serieek izaera bera dute.

c) $a_n\geq 0$ izanik, baldin $\{a_n\}$ segida dibergentea bada $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

d) Baldin $\{a_n\}$ segida konbergentea bada $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da

e) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ berredura seriearen konbergentzi arloa $(-1,2)$ tartea izan daiteke.

(Puntu 1)

a) Zuzena da:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ serie geometrikoa da, $r=\frac{1}{a}>0$ arrazoia delarik. Beraz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n} \text{ konbergentea da } \Leftrightarrow r=\frac{1}{a}<1 \Leftrightarrow a>1$$

b) Zuzena da:

Serie baten izaera ez da aldatzen gai guztiak konstante ez-nuluaz biderkatuz gero.

c) Zuzena da:

$\{a_n\}$ dibergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\infty\neq 0 \Rightarrow$ Konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da betetzen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ezin da konbergentea izan eta $a_n\geq 0$ denez $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

d) Ez da zuzena:

$\{a_n\}$ konbergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea denik.

Adibideak:

1) $a_n=\frac{2n+1}{3n-5}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ konbergentea da. Baina $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ezin da konbergentea izan.

2) $a_n=\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ konbergentea da. Baina $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da.

e) Ez da zuzena:

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ berredura seriearen konbergentzi arloak jatorriarekiko tarte simetrikoa izan behar du.