Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n \cdot e^{1/a} + e\cdot a^2}{a^n - 3}$, $a>0$ **izanik.** **(1.5 puntu)**

$$\forall a>1 \quad \lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot e^{1/a} + e\cdot a^2}{a^n - 3} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot e^{1/a}}{a^n} = e^{1/a}$$

$$\forall a<1 \quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot e^{1/a} + e\cdot a^2}{a^n - 3} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{e\cdot a^2}{-3} = -\frac{e\cdot a^2}{3}$$

Baldin $a=1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n \cdot e^{1/a} + e\cdot a^2}{a^n - 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e+e}{1-3} = -e$

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-1}{n} + \dfrac{2-\sqrt{10}}{n} + \ldots + \dfrac{n-\sqrt{n^2+3n}}{n}\right)$. **(1.5 puntu)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n} + \frac{2-\sqrt{10}}{n} + \ldots + \frac{n-\sqrt{n^2+3n}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+(2-\sqrt{10})+\ldots+(n-\sqrt{n^2+3n})}{n} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right) \overset{(**)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n^2+3n)}{n+\sqrt{n^2+3n}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$$

(*) $\{n\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz erabil daiteke.
(**) Konjokatuaz biderkatuz eta zatituz

3.- Determinatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{bn} \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n)}$ seriearen izaera, $a>0$ eta $b \in \mathbb{R}$ parametroen balioen arabera. (1.5 puntu)

$a_n = \frac{n!}{e^{bn} \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n)} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D\`Alambert aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{e^{b(n+1)} \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n) \cdot (a+n+1)} \frac{e^{bn} \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n)}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^b \cdot (a+n+1)} = \frac{1}{e^b}$$

Orduan, $\frac{1}{e^b} < 1 \Leftrightarrow e^b > 1 \Leftrightarrow b > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da.

$\frac{1}{e^b} > 1 \Leftrightarrow e^b < 1 \Leftrightarrow b < 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\frac{1}{e^b} = 1 \Leftrightarrow e^b = 1 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow a_n = \frac{n!}{(a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 0$ kasuan Raabe-Duhamel aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{a+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{a+n+1-n-1}{a+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n+1} = a$$

Beraz, baldin $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

baldin $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da.

baldin $a = 1 \Rightarrow a_n = \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

4.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{a^n}$ seriearen izaera, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ parametroaren balioen arabera. (1.5 puntu)

$a_n = \frac{2n}{a^n}$ positiboa edo negatiboa izan daiteke $\forall a < 0$, beraz balio absolutuen seriea aztertuko dugu. D\`Alambert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{|a|^{n+1}} \cdot \frac{|a|^n}{2n} = \frac{1}{|a|}$. Orduan:

$\frac{1}{|a|} < 1 \Leftrightarrow |a| > 1 \Leftrightarrow a \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutuki konbergentea da.

$$\frac{1}{|a|} > 1 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow a \in (-1,1) \begin{cases} \Rightarrow \forall a \in (0,1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \Rightarrow \forall a \in (-1,0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da absolutuki konbergentea} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da konbergentea} \end{cases}$$

$$\frac{1}{|a|}=1 \Leftrightarrow |a|=1 \Leftrightarrow a=\pm 1 \begin{cases} \text{Baldin } a=1 \Rightarrow a_n = 2n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \text{Baldin } a=-1 \Rightarrow a_n = (-1)^n \cdot 2n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da konbergentea} \end{cases}$$

<u>Beste modu batera.</u> Baldintza beharrezkoa aztertzen hasten bagara:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{|a|^n} = \begin{cases} \infty \quad \forall |a|\le 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ezin da konbergentea izan } \forall a \in [-1,1]-\{0\} \\ 0 \quad \forall |a|>1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea izan daiteke } \forall a \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty). \end{cases}$$

Eta orain D`Alambert aplikatzen zaio $|a|>1$ denean:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{|a|^{n+1}}\cdot\frac{|a|^n}{2n} = \frac{1}{|a|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolutuki konbergetea da } \forall a \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

5.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}$ **berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura. (2 puntu)**

Balio absolutuen serieari D`Alambert aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\frac{e^n\cdot n}{|x|^n} = \frac{|x|}{e} < 1 \Leftrightarrow x\in(-e,e)$$

Baldin $x=-e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(-e)^n}{e^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ dibergentea da.

Baldin $x=e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot e^n}{e^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ baldintzaz konbergentea da.

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}$ konbergentea da $\forall x\in(-e,e]$. Beraz:

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n} \quad \forall x\in(-e,e] \text{ eta deribagarria da } \forall x\in(-e,e)\text{. Hau da:}$$

$$\exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}}{e^n} \overset{(*)}{=} \frac{1/e}{1+x/e} = \frac{1}{x+e} \quad \forall x\in(-e,e)$$

Emaitza hau integratuz:

$$S(x) - \underbrace{S(0)}_{=0} = S(x) = \int_0^x \frac{1}{t+e}dt = \mathrm{L}(t+e)\Big|_0^x = \mathrm{L}(x+e)-1 \quad \forall x\in(-e,e)$$

$$x=e \text{ puntuan } \begin{cases} \exists S(x) \text{ eta jarraitua da} \\ \exists \mathrm{L}(x+e)-1 \text{ eta jarraitua da} \end{cases}$$

Orduan, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n} = \mathrm{L}(x+e)-1 \quad \forall x\in(-e,e]$

(*) Serie geometrikoa da, arrazoia $r=-\frac{x}{e}$.

6.- a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gai ez-negatiboen serie konbergentea bada, zein da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ seriearen izaera?

b) Baldin $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen batura.

c) Baldin $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{7n + \mathrm{L}n}{n}$, determinatu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen izaera eta kalkulatu bere batura.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berredura-seriea konbergentea izan daiteke $\forall x > 0$ eta dibergentea $\forall x \le 0$?

(2 puntu)

a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) = \mathrm{L}1 - \mathrm{L}(1+a_n) = -\mathrm{L}(1+a_n) \sim -a_n$

Orduan $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ konbergentea da.

<u>Oharra</u>: $a_n \ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+a_n} \le 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) \le 0$. Beraz, konparaziozko lehenengo irizpidea aplikatzen badugu, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearekin konparatzeko, $\sum_{n=1}^{\infty} -\mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ jarri beharko genuke. Hau da, $\mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) \le a_n$ (egia bada ere) ezin da erabili justifikatzeko $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ konbergentea dela. (Adibidez: $\frac{-1}{n} \le \frac{1}{n^2} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ konbergentea **).**

b) Baldin $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie geometrikoa da, bere arrazoia $r = \frac{1}{2} < 1$ dena. Orduan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1$.

c) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n + \mathrm{L}n}{n} = 7 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$.

d) Ezinezkoa da, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berredura-seriearen konbergentzi arloa jatorriarekiko tarte simetrikoa baita.