Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_n(n+2)\right]^{3n\cdot\mathrm{L}n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2n}+\dfrac{2}{3n}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)n}\right]$

(2 puntu)

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left[\log_n(n+2)\right]^{3n\cdot\mathrm{L}n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{L}(n+2)}{\mathrm{L}n}\right]^{3n\cdot\mathrm{L}n}\underset{(\mathrm{L}(n+2)\sim\mathrm{L}n)}{=}1^{\infty}=A\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}A=\lim_{n\to\infty}3n\cdot\mathrm{L}n\cdot\mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{L}(n+2)}{\mathrm{L}n}\right]\sim\lim_{n\to\infty}3n\cdot\mathrm{L}n\cdot\left[\frac{\mathrm{L}(n+2)}{\mathrm{L}n}-1\right]=\lim_{n\to\infty}3n\cdot\left[\mathrm{L}(n+2)-\mathrm{L}n\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}3n\cdot\mathrm{L}\left(\frac{n+2}{n}\right)\sim\lim_{n\to\infty}3n\cdot\left(\frac{n+2}{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}3n\cdot\frac{n+2-n}{n}=6\quad\Leftrightarrow\quad A=e^{6}$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+\frac{2}{3n}+\ldots+\frac{n}{(n+1)n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{n+1}}{n}\overset{(STOLZ)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{n-(n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

STOLZ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ non, kasu honetan, $\{b_n\}=\{n\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea den.

2.- Zehaztu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n \cdot a^n}$ seriearen izaera $\forall a > 0$.

(2 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n!}{(n+1)^n \cdot a^n} \geq 0 \quad \forall n$. D´Alembert-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1} \cdot a^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot a^n}{n!} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+2)\cdot(n+2)^n} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

Eta $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = 1^\infty = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{L}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \sim \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{n+1-n-2}{n+2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Orduan: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a\cdot e} \begin{cases} <1 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.} \\ >1 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.} \\ =1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \text{Kasu zalantzakoa da.} \end{cases}$

Baldin, $a = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n!\cdot e^n}{(n+1)^n} \overset{(1)}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^n}{(n+1)^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{(n+1)^n} \overset{(2)}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e} \to \infty \neq 0$

Beraz, ez da baldintza beharrezkoa egiaztatzen, orduan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

(1) Stirling.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$

3.- Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}\left(4+x^4\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena non den baliagarria adieraziz.

(2 puntu)

$$f(x)=\mathrm{L}\left(4+x^4\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{4x^3}{4+x^4}=\frac{x^3}{1+\frac{x^4}{4}}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^3\cdot\left(-\frac{x^4}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+3}}{4^n}$$

$(*)\ r=-\frac{x^4}{4}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura. Konbergentea beraz,

$$\forall x\ /\ |r|=\frac{x^4}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Orduan, $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+3}}{4^n}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Eta integragarria da $\left[0,x\right]$ tartean, $\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$:

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+4}}{4^n\cdot(4n+4)}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)=\mathrm{L}4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+4}}{4^n\cdot(4n+4)}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Baldin $x=\pm\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\exists f \text{ jarraitua}\\ \mathrm{L}4+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da} \Rightarrow \exists\text{batura jarraitua}\end{cases}$

Beraz, $f(x)=\mathrm{L}4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+4}}{4^n\cdot(4n+4)}\quad \forall x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(|x|+|y-1|-2)}{\sqrt{y+x^2+2}}-\mathrm{L}(x^2+2-y)$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/-1\le|x|+|y-1|-2\le 1,\ y+x^2+2>0,\ x^2+2-y>0\right\}$$

- $-1\le|x|+|y-1|-2\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1\le|x|+|y-1|\le 3$

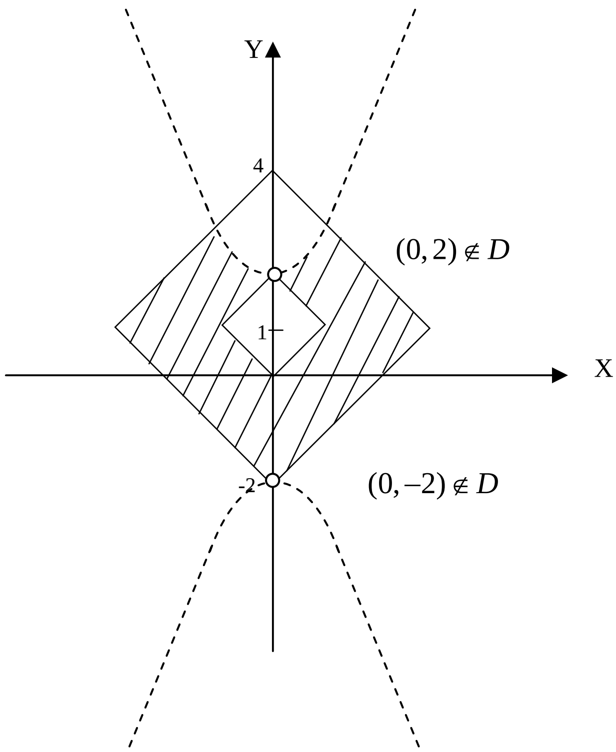
  Bi erronboren arteko eskualdea da.

- $y+x^2+2>0 \quad\Leftrightarrow\quad y>-x^2-2$

  $y=-x^2-2$ parabola da, erpina $(0,-2)$ puntuan daukana.

- $x^2+2-y>0 \quad\Leftrightarrow\quad y<x^2+2$

  $y=x^2+2$ parabola da, erpina $(0,2)$ puntuan daukana.



Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $f(x,y)=\begin{cases} x+\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Aztertu bere jarraitutasuna $\mathbb{R}^2$ planoan.
b) Kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak (0,0) puntuan..
c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
d) Estudiatu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan.

(2.5 puntu)

a) $D=\mathbb{R}^2$ eta $\forall(x,y)\in D-\{(0,0)\}$ f jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$(x,y)=(0,0)$ puntuan, $\exists f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[x+\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)\right]=0+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$$

Eta $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\cdot\sin\left(\frac{\rho^3\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{\rho^2}\right)=$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\big(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\big)=0\quad\forall\theta\in[0,2\pi)$$

Orduan $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ $\Leftrightarrow$ f jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $\displaystyle f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\frac{0}{h^2}\cdot\sin h}{h}=1$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{k^2}\cdot\sin k}{k}=0$$

c) $(0,0)$ puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliko dugu. Hots, *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - h\cdot f'_x(0,0) - k\cdot f'_y(0,0) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| h + \frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right) - h \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\left| \rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right) \right|}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\overbrace{\sin\left(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right)}^{\to 0} = 0$$

Beraz, *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan.

d) *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow$ *f* deribagarria da $(0,0)$ puntuan.

6.- $w = xyz - f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$ funtzioa emanik, non f diferentziagarria den, aurkitu hurrengo adierazpenaren balioa:

$$E = x \cdot w'_x + y \cdot w'_y + z \cdot w'_z$$

(1.5 puntu)

$w = xyz - f(u,v)$ non $u = \dfrac{x}{z}$ eta $v = \dfrac{y}{z}$.

$$\begin{array}{l} x \nwarrow \\ y \leftarrow w = xyz - f \left\langle \begin{array}{l} u \left\langle \begin{array}{l} x \\ z \end{array} \right. \\ v \left\langle \begin{array}{l} y \\ z \end{array} \right. \end{array} \right. \\ z \swarrow \end{array}$$

$$w'_x = yz - f'_u \cdot u'_x = yz - \frac{1}{z} \cdot f'_u$$

$$w'_y = xz - f'_v \cdot v'_y = xz - \frac{1}{z} \cdot f'_v$$

$$w'_z = xy - f'_u \cdot u'_z - f'_v \cdot v'_z = xy + \frac{x}{z^2} \cdot f'_u + \frac{y}{z^2} \cdot f'_v$$

Orduan, $E = x \cdot w'_x + y \cdot w'_y + z \cdot w'_z = 3xyz - \dfrac{x}{z} \cdot f'_u - \dfrac{y}{z} \cdot f'_v + \dfrac{x}{z} \cdot f'_u + \dfrac{y}{z} \cdot f'_v = 3xyz$

7.- Hainbat ate daukan pabiloi zabal batean hiru sagu sartzen dira, bat zuria, beste bat grisa eta beste bat beltza. Hiru saguak presio handitan ezartzen dira. Presioa $P(x,y)=\dfrac{3}{3x^2+y^2}$ atmosfera funtzioak ematen du, non (x,y) posizioa den. Hauetako saguren batek 2 atmosfera edo presio gehiago jasotzen badu, segundo batzutan hil egingo dela ezagutzen da. Saguak honako posizio hauetan daude:

$$\begin{cases} \text{Zuria: } (-1,3) \\ \text{Grisa: } (3,0) \\ \text{Beltza: } \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right) \end{cases}$$

a) **Sagu zuriak eta grisak,** esperimentu zientifiko baten emaitza direla eta, matematikari buruzko oso ezaguera zabala dute. Beraz, norantz ihes egingo dute presio hilgarria saihesteko?

b) **Sagu beltzak**, berriz, ezer ez daki matematikari buruz. Baldin, horrez gain, urduri jartzen bada eta ihes egiten badu $\left(2,-\sqrt{6}\right)$ norabidean, zer gertatuko zaio?

c) Kalkulatu 2 atmosferako presioari dagokion isobara kurbaren ekuazioa.

(3 puntu)

a) Sagu Zuriaren posizioa $Z=(-1,3)$, sagu Grisarena $G=(3,0)$ eta sagu Beltzarena $B=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right)$ dira.

Hasierako puntu horietan bakoitza jasotzen ari den presioa hauxe da:

$$P(Z)=\frac{1}{4},\ P(G)=\frac{1}{9} \text{ eta } P(B)=2$$

Arazorik ez izateko, hirurek ihes egin beharko lukete presioa arinen jaisten den norabidean, hau da $-\overrightarrow{\nabla P}$ bektorearen norabidean.

$$P'_x=\frac{-18x}{\left(3x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} P'_x(Z)=\dfrac{1}{8} \\ P'_x(G)=-\dfrac{2}{27} \end{cases} \quad \text{eta} \quad P'_y=\frac{-6y}{\left(3x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(Z)=-\dfrac{1}{8} \\ P'_y(G)=0 \end{cases}$$

Orduan, $-\overrightarrow{\nabla P}(Z)=\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$ eta $-\overrightarrow{\nabla P}(G)=\left(\dfrac{2}{27},0\right)$.

Hau da, sagu Zuriak $y=-x$ zuzenaren norabidea jarraituz ihes egin beharko luke, eta sagu Grisak, berriz, OX ardatzaren norabidean. Kasu bietan koordenatu-jatorritik urruntzen dira.

b) $P(B)=2$ denez, sagu Beltza benetako arriskuan dago. Baldin $\vec{u}=\left(2,-\sqrt{6}\right)$ norabidean ihes egiten badu, presioaren aldakuntza deribatu direkzionalak emango digu.

$$|\vec{u}| = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \right)$$ unitarioa da. Orduan:

$$\left.\frac{dP}{d\vec{u}}\right|_B = P'_x(B) \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} + P'_y(B) \cdot \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = -\frac{8}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = 0$$

Hau da, presioa ez da aldatzen sagu Beltza maila-kurbatik mugitzen ari baita. Beraz, hil egingo du.

c) $P(x, y) = \frac{3}{3x^2 + y^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 + 2y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{3/2} = 1$

Hau da, 2 atmosferako presioari dagokion maila-kurba (0,0) puntuan zentroa duen elipsea da. Eta hortik doa sagu Beltza mugitzen.

8.- Arrazoitu ea hurrengo baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ edonolako gai errealen seriea bada eta $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, orduan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

b) Edonolako gaien serie bat konbergentea baina ez absolutuki konbergentea izan daiteke.

c) Serie baten gaiak berrordenatzen badira bere batura ez da aldatzen.

d) Baldin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jarraitua bada $x=x_0$ puntuan, orduan f deribagarria da puntu horretan.

e) Izan bedi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzio diferentziagarria (a,b) puntuan. Orduan f konstante mantenduko da puntu horretatik igarotzen den maila-kurbaren ukitzailearen norabidean.

f) Funtzio deribagarriak diferentzagarriak dira

(3 puntu)

a) Faltsua. Baldin $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ez da konbergentea izango, baina edonolako gai errealen seriea denez, oszilatzailea izan daiteke. Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

b) Egiazkoa. Serie hauei baldintzaz konbergenteak direla esaten zaie. Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

c) Faltsua. Baldin gai ez-negatiboen seriea balitz egiazkoa litzateke. Baina edonolako gai errealen seriea badugu eta baldintzaz konbergentea bada (konbergentea baina ez absolutuki) orduan gaiak berrordenatzean batura aldatuko da.

d) Faltsua. Adibidea: $f(x)=|x|$ jarraitua da $x=0$ puntuan baina ez da deribagarria puntu horretan.

e) Egiazkoa. Baldin f diferentziagarria bada eta maila-kurbaren norabidea jarraituz mugitzen bada, orduan bere deribatu direkzionala nulua da, hau da, f ez da aldatzen.

f) Faltsua. Baldin f aldagai bateko funtzioa bada, orduan f deribagarria da $\Leftrightarrow$ f diferentziagarria da. Baina f bi aldagaikoa balitz, f diferentziagarria bada $\Rightarrow$ f deribagarria da, baina elkarrekikoa ez da egiazkoa: f deribagarria $\not\Rightarrow$ f diferentziagarria.