Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}$

(1.5 puntu)

Bi eratan egin daiteke.

1. modura:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}\overset{(Z-E)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}\overset{(STOLZ)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n-1)^3}=1$$

Z-E: $a_n=1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3>0 \quad \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

Stolz: $b_n=1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3>0 \quad \forall n,$ hertsiki gorakora eta dibergentea $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_b}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_b-b_{n-1}}$$

2. modura:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}=\infty^0=A \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3\right)}{n}\overset{(STOLZ)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{L}\left(1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3\right)-\mathrm{L}\left(1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}\right)=\mathrm{L}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}\right)\overset{(*)}{=}\mathrm{L}(1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=e^0=1$$

Stolz: Kasu honetan $b_n=n>0 \quad \forall n,$ hertsiki gorakora eta dibergentea.

(*) Hemendik aurrera 1. modura bezala jarraitzen dugu.

2.- Ikasle batek dio $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots$ seriea konbergentea dela, bere gaiak txikiak eta zerora azkar hurbiltzen baitira. Arrazoia du mutilak? Arrazoibidea azaldu.

(Puntu 1)

Mutilak ez du arrazoia eta azalpena bi eratan eman daiteke:

a) $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ non $a_n=\frac{1}{10000+n}\geq 0 \quad \forall n$.

$a_n=\frac{1}{10000+n}\sim\frac{1}{n}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da, beraz $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

b) $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots=\sum_{n=10000}^{\infty}\frac{1}{n}$. Hau da, emandako seriea serie harmonikotik lehenengo 9999 gaiak (batugai kopuru finitua alegia) kentzean sortutakoa da. Beraz, bere izaera ez da aldatzen. Hortaz, dibergentea da.

3.- a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \quad \forall a>0$**.**

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ **seriearen izaera,** $\forall a>0$, $a\neq\dfrac{1}{e}$

(2.5 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} = a^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} a^{\infty} = \begin{cases} \infty & \forall a>1 \\ 1 & \text{baldin } a=1 \\ 0 & \forall a/\ 0<a<1 \end{cases}$$

(*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ dibergentea da $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\infty$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} > 0 \quad \forall n.$

$\boxed{\forall a\geq 1}$, aurreko atalean ikusi dugunez, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Hau da, konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da egiaztatzen, beraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\boxed{\forall a<1}$, D´Alembert-en irizpidea aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+1}} = a^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{kasu zalantzakoa.}$$

Raabe-Duhamel-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-a^{\frac{1}{n+1}}\right) \sim -\lim_{n\to\infty} n\cdot \mathrm{L}\left(a^{\frac{1}{n+1}}\right) = -\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n+1}\mathrm{L}a = -\mathrm{L}a = \mathrm{L}\left(\frac{1}{a}\right)$$

Beraz:

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{a}\right)\begin{cases} >1 \iff \dfrac{1}{a}>e \iff a<\dfrac{1}{e} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.} \\ <1 \iff \dfrac{1}{a}<e \iff a>\dfrac{1}{e} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.} \\ =1 \iff \dfrac{1}{a}=e \iff a=\dfrac{1}{e} \Rightarrow \text{Kasu zalantzakoa. Enuntziatuaren arabera,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{kasu hau ez dugu aztertu behar.} \end{cases}$$

4.- $f(x)=\dfrac{x}{|\mathrm{L}x|}$ **funtzioa emanik,**

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu bere asintotak.
c) Aztertu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

(3 puntu)

a) $D=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0,x\neq 1\}=(0,1)\cup(1,\infty)$. $\quad f(x)=\dfrac{x}{|\mathrm{L}x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{L}x} & \forall x\in(1,\infty)\\ -\dfrac{x}{\mathrm{L}x} & \forall x\in(0,1)\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{0}{\infty}=0 \quad\Rightarrow$ Eten gaindigarria dago. Beraz, $x=0$ ez da asintota bertikala.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1$ asintota bertikala da.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{(\mathrm{L}x\ll x)}{=}\infty \quad\Rightarrow$ ez dago asintota horizontalik.

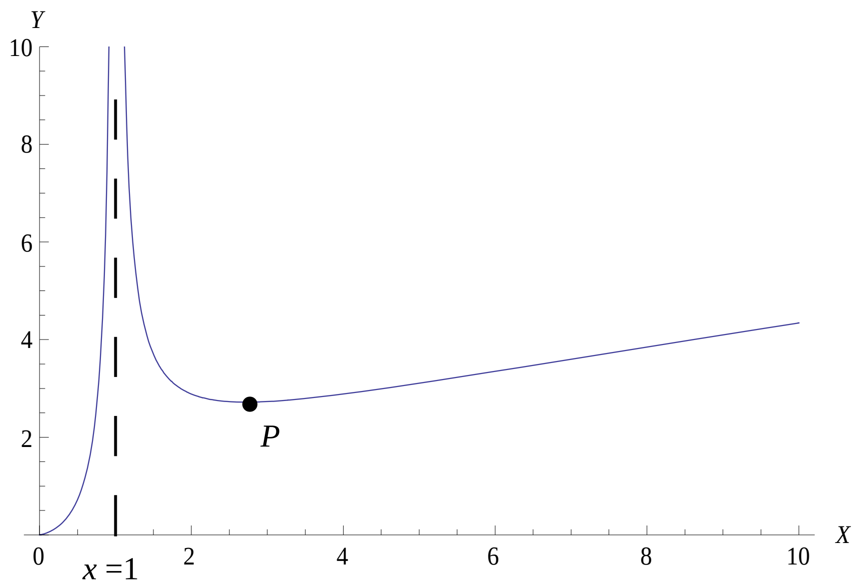
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\mathrm{L}x}=\dfrac{1}{\infty}=0 \quad\Rightarrow$ ez dago asintota zeiharrik.

c) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}x-1}{(\mathrm{L}x)^2} & \forall x\in(1,\infty)\\ \dfrac{1-\mathrm{L}x}{(\mathrm{L}x)^2} & \forall x\in(0,1)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}x=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=e$

$\forall x\in(0,1)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f$ gorakortasuna da

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(1,e)\quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ beherakorra da}\\ \forall x\in(e,\infty)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ gorakorra da}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad P=(e,e)$ minimo erlatiboa da.

d)



5.- Aurkitu $f(x)=x^2\cdot \mathrm{L}\left(e+x^2\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non den baliagarria adieraziz.

(3 puntu)

$f(x)=x^2\cdot g(x)$ non

$$g(x)=\mathrm{L}\left(e+x^2\right) \quad\Rightarrow\quad g'(x)=\frac{2x}{e+x^2}=\frac{2x/e}{1+\dfrac{x^2}{e}}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x}{e}\cdot\left(-\frac{x^2}{e}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{e^{n+1}}\cdot x^{2n+1}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{e},\sqrt{e}\right)$$

(*) Serie geometrikoaren batura, arrazoia $r=-\dfrac{x^2}{e}$ $\Rightarrow$ konbergentea dena $\Leftrightarrow |r|<1$ $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{e}<1 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{e}$.

Eta integragarria da $\left[0,x\right]$ tartean $\forall x\in\left(-\sqrt{e},\sqrt{e}\right)$:

$$g(x)-g(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{e^{n+1}}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{e},\sqrt{e}\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$g(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}\quad \forall x\in\left(-\sqrt{e},\sqrt{e}\right)$$

Orduan,

$$f(x)=x^2\cdot g(x)=x^2\cdot\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}\right)=x^2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+4}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}=S(x)$$

$$\forall x\in\left(-\sqrt{e},\sqrt{e}\right)$$

$$x=\pm\sqrt{e}\ \text{ puntuetan }\begin{cases} f(e)=e^2\cdot\mathrm{L}\left(2e\right)\ \Rightarrow\ \exists f\ \text{ eta jarraitua da}\\ S(e)=e+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{e}{n+1}\quad \text{konbergentea da}\ \Rightarrow\ \exists S\ \text{ jarraitua}\end{cases}$$

Beraz, $f(x)=x^2+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+4}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}\quad \forall x\in\left[-\sqrt{e},\sqrt{e}\right]$

Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

6.- Izan bedi $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ non $z = f(x, y)$**. Arrazoitu ea hurrengo baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:**

a) **Baldin *f* deribagarria bada** P_0 **puntuan, orduan *f* diferentziagarria da** P_0 **puntuan.**

b) **Baldin *f* diferentziagarria bada** $P_0 \in D$ **puntuan** $\Rightarrow$ $f_x'(P_0) = f_y'(P_0) = 0$

c) **Baldin *f* jarraitua ez bada** $P_0 \in D$ **puntuan** $\Rightarrow$ $\nexists f_x'(P_0)$, $\nexists f_y'(P_0)$.

d) **Baldin *f* diferentziagarria ez bada** $P_0 \in D$ **puntuan** $\Rightarrow$ $\nexists f_x'(P_0)$, $\nexists f_y'(P_0)$.

e) **Baldin *f* diferentziagarria bada** $P_0 \in D$ **puntuan** $\Rightarrow$ f_x' **jarraitua da** P_0 **puntuan.**

(2 puntu)

a) Faltsua. Deribagarritasuna baldintza beharrezkoa da diferentziagarritasunerako, baina ez, ordea, nahikoa.

b) Faltsua. Baldin f diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan $\Rightarrow$ $\exists f_x'(P_0)$, $f_y'(P_0) \in \mathbb{R}$, baina ez dute zertan berdinak eta, areago, nuluak izango.

c) Faltsua. Jarraitutasunaren eta deribatu partzialen existentziaren arteko erlaziorik ez dago.

d) Faltsua. Deribatu partzialen existentzia diferentziagarritasunerako baldintza beharrezkoa da baina ez, ordea, nahikoa.

e) Faltsua. Baldin f diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan $\Rightarrow$ $\exists f_x'(P_0)$, $f_y'(P_0) \in \mathbb{R}$, baina ez dute zertan jarraituak izango.

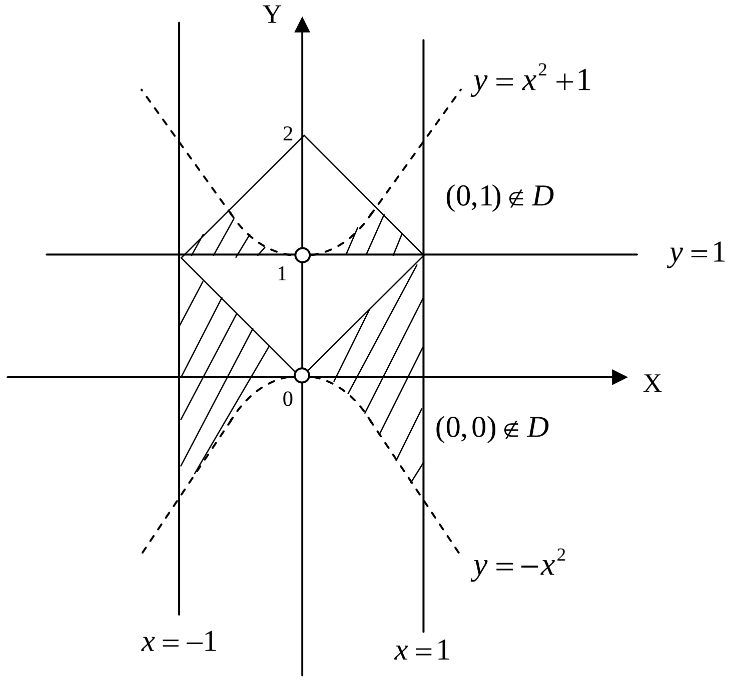
7.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\arcsin x\cdot\sqrt{(1-y)\cdot(|x|+|y-1|-1)}+\frac{L(x^2+1-y)}{\sqrt{y+x^2}}$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\le x\le 1,\ (1-y)\cdot(|x|+|y-1|-1)\ge 0,\ x^2+1-y>0,\ y+x^2>0\right\}$$

- $-1\le x\le 1$
- $(1-y)\cdot(|x|+|y-1|-1)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\begin{cases}1-y\ge 0\\ \text{eta}\\ |x|+|y-1|-1\ge 0\end{cases}\\ \text{edo}\\ \begin{cases}1-y\le 0\\ \text{eta}\\ |x|+|y-1|-1\le 0\end{cases}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\begin{cases}y\le 1\\ \text{eta}\\ |x|+|y-1|\ge 1\end{cases}\\ \text{edo}\\ \begin{cases}y\ge 1\\ \text{eta}\\ |x|+|y-1|\le 1\end{cases}\end{cases}$
- $x^2+1-y>0 \quad\Leftrightarrow\quad y<x^2+1$
- $y+x^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad y>-x^2$



8.- $f(x,y)=\begin{cases} x+\dfrac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.
b) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
c) Kalkulatu bere deribatu direkzional maximoa (0,0) puntuan.
d) Kalkulatu bere deribatu direkzionala (0,0) puntuan, gradientearekiko norabide perpendikularrean.

(3 puntu)

a) $\exists f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x+\frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \underbrace{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}_{1}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{\text{(polarretan)}}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^3=0$$

Beraz, f jarraitua da (0,0) puntuan.

b) Diferentziagarria izateko, nahikoa ez bada ere, f funtzioak bi baldintza bete behar ditu. Bata aurreko atalean egiaztatzen dela frogatu dugu, jarraitua izatea alegia. Bestea, deribatu partzial finituak edukitzea da:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+\dfrac{h^3}{\sqrt{h^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h^2}{\sqrt{h^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2}}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{|h|^2}{|h|}\cdot e^{\sqrt{h^2}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(1+|h|\cdot e^{\sqrt{h^2}}\right)=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{k^3}{\sqrt{k^2}}\cdot e^{\sqrt{k^2}}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2}{\sqrt{k^2}}\cdot e^{\sqrt{k^2}}=\lim_{k\to 0}|k|\cdot e^{\sqrt{k^2}}=0$$

Orain, baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu.

Hots, f diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h+\dfrac{(h+k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2+k^2}}-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{(h+k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|(h+k)^3\right|\cdot \overbrace{e^{\sqrt{h^2+k^2}}}^{1}}{h^2+k^2}=$$

$$\overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cdot \left|(\cos\theta+\sin\theta)^3\right|}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho \cdot \left|(\cos\theta+\sin\theta)^3\right| = 0 \quad \forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

c) Deribatu direkzional maximoa (0,0) puntuan gradientearen modulua da, beraz:

$$\overrightarrow{\nabla f}(0,0) = \left(f'_x(0,0),\, f'_y(0,0)\right) = (1,0) \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{\nabla f}(0,0)\right| = 1$$

d) Baldin $\vec{u} \perp \overrightarrow{\nabla f}(0,0) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = 0$, deribatu direkzional minimoa hain zuzen ere.

9.- Izan bedi $f(x,y)=\sin\left(g(xy)-x\right)$ diferentziagarria, baita *g* funtzioa ere, non $g(1)=1$ eta $g'(1)=1$. Kalkulatu $P(x,y)=(1,1)$ puntuan *f*-ren deribatu direkzionala, OX ardatzaren noranzko positiboarekin 30º angelua osatzen duen norabidean.

(2 puntu)

Kalkulatu behar dugu $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} \overset{(*)}{=} f_x'(1,1)\cdot h_1 + f_y'(1,1)\cdot h_2$

non $\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)=\left(\cos 30^{\circ},\sin 30^{\circ}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$$f_x'(x,y)=\left(y\cdot g'(xy)-1\right)\cdot\cos\left(g(xy)-x\right) \quad\Rightarrow\quad f_x'(1,1)=\left(g'(1)-1\right)\cdot\cos\left(g(1)-1\right)=0$$

$$f_y'(x,y)=x\cdot g'(xy)\cdot\cos\left(g(xy)-x\right) \quad\Rightarrow\quad f_y'(1,1)=g'(1)\cdot\cos\left(g(1)-1\right)=1$$

Beraz, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = f_x'(1,1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+f_y'(1,1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(*) *f* diferentziagarria baita.

<u>Oharra</u>:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\rangle f = \sin - u \left\langle \begin{matrix} g - v \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ x \end{matrix}\right.$$

non $u=g(xy)-x$ eta $v=xy$.