Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Aurkitu a eta b hurrengo funtzioa jarraitua izan dadin $x=1$ puntuan:

$$f(x)=\begin{cases} b\cdot \mathrm{L}(1+4x) & \forall x<1 \\ a & x=1 \\ \dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x} & \forall x>1 \end{cases}$$

b) a eta b parametroen balio horietarako, aztertu f-ren deribagarritasuna $x=1$ puntuan

(2 puntu).

a) f jarraitua da $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Kasu honetan $f(1)=a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} b\cdot \mathrm{L}(1+4x)=b\cdot \mathrm{L}(5) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x}\sim \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-e}{e\cdot(x-1)}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x}{e}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=b\cdot \mathrm{L}(5)=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{\mathrm{L}(5)}$$

Eta f jarraitua da $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow a=1$ eta $b=\dfrac{1}{\mathrm{L}(5)}$.

b) Balio horietarako, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}(1+4x)}{\mathrm{L}(5)} & \forall x<1 \\ 1 & x=1 \\ \dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x} & \forall x>1 \end{cases}$, deribagarria da $x=1$ puntuan

$\Leftrightarrow \exists f'(1)\in\mathbb{R}$.

Hau da:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{\mathrm{L}(1+4(1+h))}{\mathrm{L}(5)}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{L}(5+4h)-\mathrm{L}(5)}{h\cdot\mathrm{L}(5)}\overset{L''H}{=}$$

$$\overset{L''H}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{4}{5+4h}}{\mathrm{L}(5)}=\frac{4}{5\cdot\mathrm{L}(5)}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{e^{1+h}-e}{e\cdot\mathrm{L}(1+h)}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{1+h}-e-e\cdot\mathrm{L}(1+h)}{h\cdot e\cdot\mathrm{L}(1+h)}\sim$$

$$\sim\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-1-\mathrm{L}(1+h)}{h^2}\overset{L''H}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-\dfrac{1}{1+h}}{2h}\overset{L''H}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h+\dfrac{1}{(1+h)^2}}{2}=1$$

Beraz, $f'(1^+)\neq f'(1^-)\Rightarrow \nexists f'(1)\Rightarrow f$ ez da deribagarria $x=1$ puntuan.

2.- $f(x)=\sqrt{1+x}$ funtzioa emanik, aurkitu Maclaurin-en 1. mailako polinomioa eta dagokion Lagrange-ren hondarra. Emaitza hori erabiliz, kalkulatu $\sqrt{2}$-ren balio hurbildua eta bornatu hurbilketa horretan egindako errorea.

(2 puntu)

Planteatu behar dugun hurbilketa polinomikoa honako hau da:

$$f(x)=P_1(x)+R_1(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(\theta x)}{2!}\cdot x^2$$

$$\text{non } 0<\theta<1 \qquad (*)$$

$f(x)=\sqrt{1+x} \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{4(1+x)^{3/2}} \Rightarrow f''(\theta x)=-\dfrac{1}{4(1+\theta x)^{3/2}}$

Beraz:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4(1+\theta x)^{3/2}\cdot 2!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\theta x)^{3/2}}$$

Orduan, $f(1)=\sqrt{2}\simeq P_1(1)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ eta hurbilketa honetan egindako errorea:

$$\text{Errorea}=\left|R_1(1)\right|=\left|-\frac{1}{8(1+\theta)^{3/2}}\right|=\left|\frac{1}{8(1+\theta)^{3/2}}\right|\overset{(*)}{<}\frac{1}{8}$$

3.- $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$ funtzioa emanik:

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu bere asintotak.
c) Zehaztu ebaki-puntuak koordenatu-ardatzekin.
d) Estudiatu bere gorakortasuna-beherakortasuna.
e) Aztertu bere ahurtasuna-ganbiltasuna.
f) Aurreko ataletan lortutako informazioa erabiliz, irudikatu, gutxi gorabehera, funtzioaren grafikoa.

(2 puntu)

a) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = e^{\frac{-1}{0^-}} = e^{\infty} = \infty \Rightarrow x = 1$ asintota bertikala da (ezkerretik)

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = e^1 = e \Rightarrow y = e$ asintota horizontala da $\Rightarrow$ Ez dago asintota zehiarrik.

c) $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ Ez du OX ardatza ebakitzen.

Baldin $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$ OY ardatza (0,1) puntuan ebakitzen du.

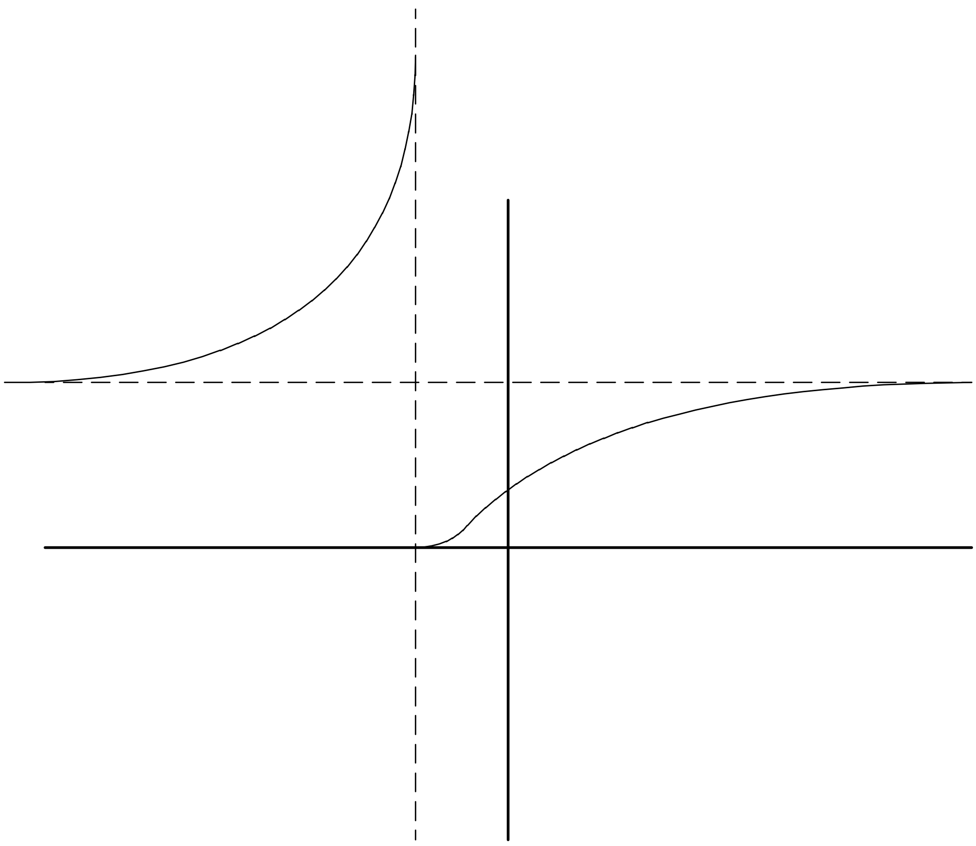
d) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow f$ gorakorra da $\forall x \in D$

e) $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} e^{\frac{x}{x+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} = \dfrac{1}{(x+1)^3} e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left[-2 + \dfrac{1}{x+1}\right] = -\dfrac{(2x+1)}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

$\forall x \in (-\infty, -1) \quad f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ahurra da (gorantz ahurra)
$\forall x \in (-1, -1/2) \quad f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ahurra da (gorantz ahurra)
$\forall x \in (-1/2, \infty) \quad f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ganbila da (beherantz ahurra)

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{e} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e}\right)$ inflexio-puntua da.



4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(x-y)}{\sqrt{4x^2+9y^2-1}}+\mathrm{L}\left(1-|x|\right)+\mathrm{L}\left(1-|y|\right)$$

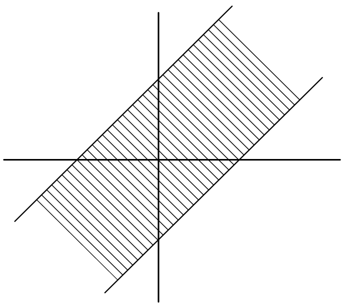
(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\le x-y\le 1, 4x^2+9y^2-1>0, 1-|x|>0, 1-|y|>0\right\}$$

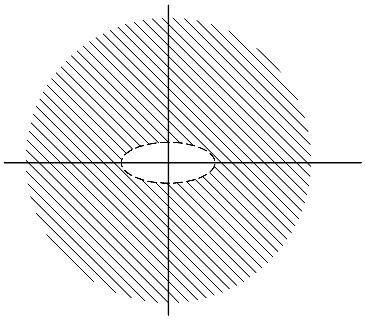
(1) $\quad -1\le x-y\le 1 \Leftrightarrow x-1\le y\le x+1$

(2) $\quad 4x^2+9y^2-1>0 \Leftrightarrow 4x^2+9y^2>1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1/4}+\dfrac{y^2}{1/9}>1$

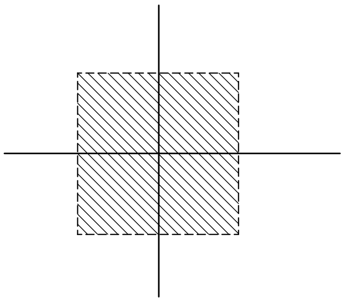
(3) $\quad 1-|x|>0, 1-|y|>0 \Leftrightarrow |x|<1, |y|<1 \Leftrightarrow -1<x<1, -1<y<1$



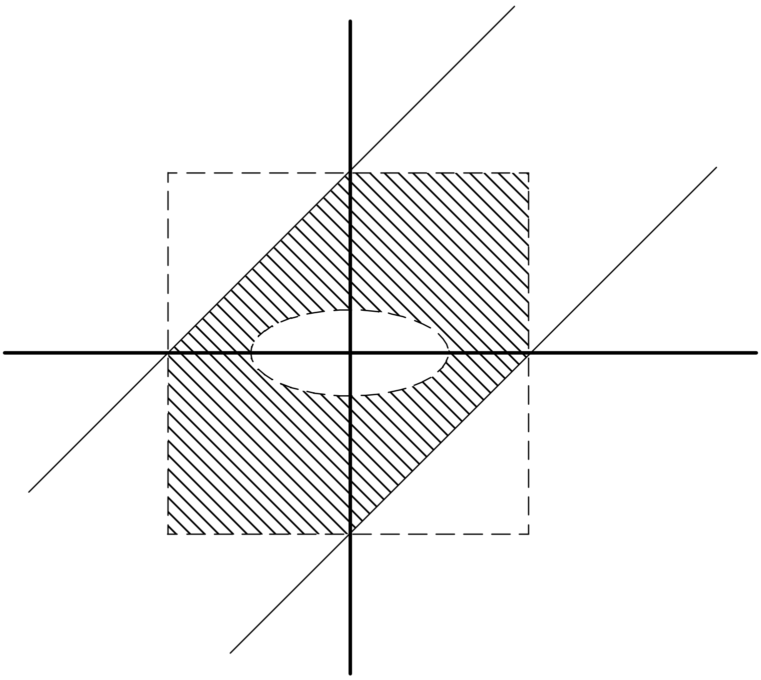
(1)



(2)



(3)



5.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{yx^2-y^3+y^2-x^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ funtzioa emanik:

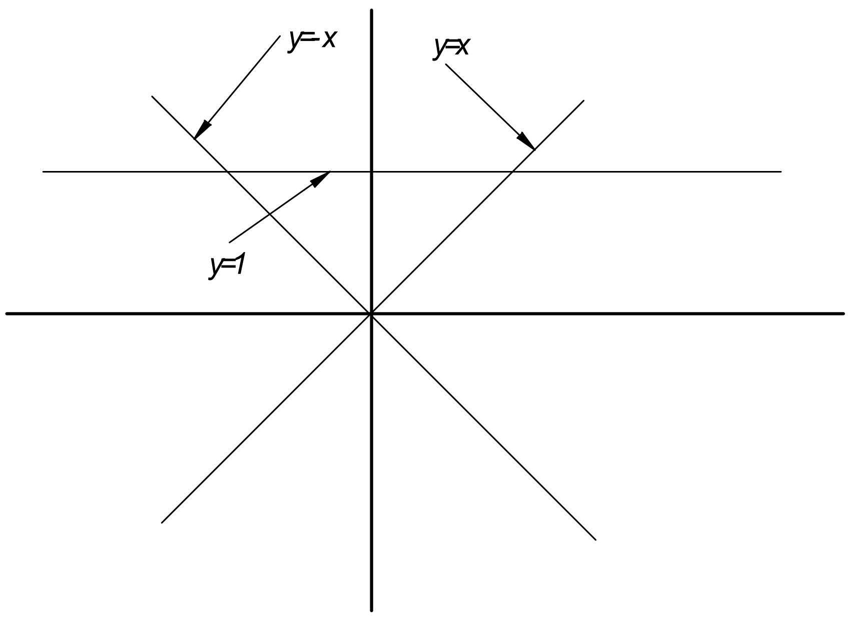
a) Irudikatu funtzioa definiturik ez dagoen planoko puntu-multzoa.
b) Estudiatu f -ren jarraitasuna (0,0) puntuan.
c) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ (jarraitasunez hedatu beharrezkoa bada).
d) Estudiatu f -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan (jarraitasunez hedatu beharrezkoa bada).

(2 puntu)

a) $\dfrac{xy(x^2-y^2)}{yx^2-y^3+y^2-x^2}=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{y(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(y-1)(x^2-y^2)}$

Beraz, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(y-1)(x^2-y^2)\neq 0\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$

$$(y-1)(x^2-y^2)=0\Leftrightarrow\begin{cases} y=1\\ x^2=y^2\Leftrightarrow |x|=|y|\Leftrightarrow y=\pm x\end{cases}$$



b) $\forall (x,y)\in D \quad \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(y-1)(x^2-y^2)}=\dfrac{xy}{y-1}$, beraz:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{y-1} & \forall (x,y)\in D-\left\{(0,0)\right\}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Orain (0,0) puntuko jarraitasuna aztertuko dugu:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{y-1}=0=f(0,0)\Rightarrow f$ jarraitua da (0,0) puntuan.

c) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{-1}-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{k-1}-0}{k}=0$$

d) (0,0) puntuan diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoak betetzen dituenez (jarraitua da eta $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ finituak dira), baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko diogu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{hk}{k-1}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{|k-1|\cdot\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(1)}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\,|\cos\theta||\sin\theta|}{|\rho\sin\theta-1|\cdot\rho}\overset{(2)}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho|\cos\theta||\sin\theta|}{|\rho\sin\theta-1|}=0\quad\forall\theta$$

Beraz, f diferentziagarria da (0,0) puntuan.

(1) Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

(2) $\lim_{\rho\to 0^+}|\rho\sin\theta-1|=1$