Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ |x-a| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+b} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases}$**. Kalkulatu *a* eta *b* parametroen balioak *f* jarraitua izan dadin.**

(2 puntu)

$\forall x<0$ f jarraitua da (polinomioa da).
$\forall x\in(0,3)$ f jarraitua da (balio absolutua).
$\forall x>3$ f jarraitua da $\Leftrightarrow x+b\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -b$.
$x=0$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}|x-a|=|-a|=|a| \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ jarraitua da } \Leftrightarrow |a|=1 \Leftrightarrow a=\pm 1 .$$

$x=3$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} f(3)=\dfrac{18}{3+b} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+3x}{x+b}=\dfrac{18}{3+b} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}|x-a| \begin{cases} \overset{(\text{baldin } a=1)}{=} \lim\limits_{x\to 3^-}|x-1|=2 \\ \overset{(\text{baldin } a=-1)}{=} \lim\limits_{x\to 3^-}|x+1|=4 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ jarraitua da } \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{3+b}=2 \Leftrightarrow b=6 \\ \dfrac{18}{3+b}=4 \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Orduan, baldin $a=1$ eta $b=6$, edo $a=-1$ eta $b=\dfrac{3}{2}$ f jarraitua da $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Oharrak</u>:

1) $b=6$ eta $b=\dfrac{3}{2}$ balioetarako, $x\neq -b \quad \forall x>3 \Rightarrow f$ jarraitua da ere puntu horietan.

2) Lortutako a eta b parametroen balioetarako, f funtzio jarraituaren adierazpen analitikoa hauetako bat litzateke.:

Baldin $a=1$ eta $b=6$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\leq 0 \\ |x-1| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+6} & \text{baldin } x\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\leq 0 \\ 1-x & \text{baldin } 0<x\leq 1 \\ x-1 & \text{baldin } 1<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+6} & \text{baldin } x\geq 3 \end{cases}$$

Baldin $a=-1$ eta $b=\dfrac{3}{2}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\leq 0 \\ |x+1| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+\frac{3}{2}} & \text{baldin } x\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\leq 0 \\ x+1 & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+\frac{3}{2}} & \text{baldin } x\geq 3 \end{cases}$$

2.- a) Aurkitu $f(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ **funtzioaren berretura-seriezko garapena, non den baliagarria adieraziz.**

b) Kalkulatu, deribatu gabe, $f'''(0)$ **.**

(2 puntu)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x+2-x+2}{(x+2)^2}}{1+\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2}=\frac{4}{x^2+4x+4+x^2-4x+4}=\frac{4}{2x^2+8}=\frac{1/2}{\dfrac{x^2}{4}+1}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot x^{2n} \quad \forall x\in(-2,2)$$

(*) Serie geometrikoaren batura, $r=-\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow$ konbergentea $\Leftrightarrow \left|-\dfrac{x^2}{4}\right|<1\Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

Eta integragarria da $\left[0,x\right]$ tartean $\forall x\in(-2,2)$:

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in(-2,2)\Leftrightarrow f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in(-2,2)$$

$x=-2$ puntuan $\nexists f$.

$x=2$ puntuan:

$$\left\{\begin{array}{l}\exists f \text{ eta jarraitua da.}\\ -\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ bald. konberg. da} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left(-2,2\right]$$

b) Lortutako berretura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea da. Hau da, x^{2n+1} gaiaren koefizientea $\dfrac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$ da, beraz:

$$\frac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\cdot(2n+1)}$$

Orduan, baldin $n=1$:

$$\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{-1}{2^3\cdot 3} \quad \Leftrightarrow \quad f'''(0)=-\frac{3!}{2^3\cdot 3}=-\frac{1}{4}$$

3.- $f(x)=\dfrac{e^x}{2x}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu asintotak.
c) Aztertu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

(2 puntu)

a) $D=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ asintota bertikala da $x\to\pm\infty$ jotzean.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$ asintota horizontala da $x\to-\infty$ jotzean.

Beraz, ezin da asintota zeiharra egon $x\to-\infty$ jotzean, baina egon daiteke $x\to\infty$ doanean: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty \quad \Rightarrow \quad \nexists$asintota zeiharra .

c) $\forall x\neq 0,\quad f'(x)=\dfrac{2x\cdot e^x-2\cdot e^x}{4x^2}=\dfrac{(x-1)\cdot e^x}{2x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

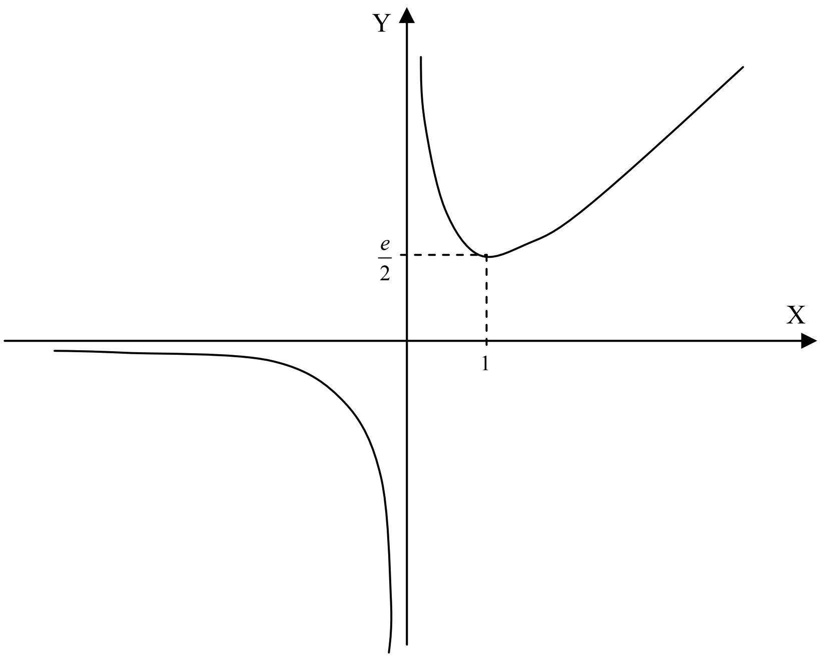
$\forall x\in(-\infty,0),\quad f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ beherakorra da

$\forall x\in(0,1),\quad f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ beherakorra da

$\forall x\in(1,\infty),\quad f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f$ gorakorra da

Orduan, $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$ puntuan minimo erlatiboa dago.

d)



4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{2y}{3}-1\right)+\sqrt{\frac{|x-1|-y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2}}$$

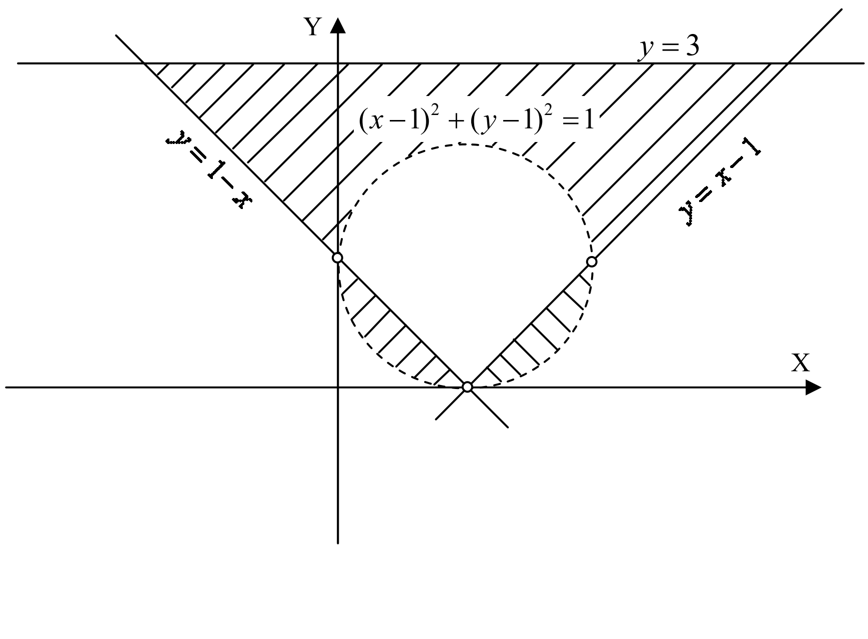
(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/ -1\le\frac{2y}{3}-1\le 1, \frac{|x-1|-y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2}\ge 0 \wedge 1-(x-1)^2-(y-1)^2\ne 0\right\}$$

- $-1\le\frac{2y}{3}-1\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le\frac{2y}{3}\le 2 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le y\le 3$

- $1-(x-1)^2-(y-1)^2\ne 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2+(y-1)^2\ne 1$

- $$\frac{|x-1|-y}{1-(x-1)^2-(y-1)^2}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}|x-1|-y\ge 0\Rightarrow\begin{cases}y\le x-1 & \forall x\ge 1\\ y\le 1-x & \forall x<1\end{cases}\\ 1-(x-1)^2-(y-1)^2>0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2<1\end{cases}\\ \text{edo}\\ \begin{cases}|x-1|-y\le 0\Rightarrow\begin{cases}y\ge x-1 & \forall x\ge 1\\ y\ge 1-x & \forall x<1\end{cases}\\ 1-(x-1)^2-(y-1)^2<0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2>1\end{cases}\end{cases}$$



5.- $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{L}\left(x^2+e^y\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aztertu *f*-ren jarraitasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Aztertu *f*-ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\mathrm{L}1\cdot(\text{bornatua})=0\cdot(\text{bornatua})=0=f(0,0)$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\mathrm{L}\left(h^2+1\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\sim\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}h\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)=0\cdot(\text{bornatua})=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\mathrm{L}\left(e^k\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{k\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\nexists f'_y(0,0)$

c) $\nexists f'_y(0,0) \Rightarrow$ *f* ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.