Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $\begin{cases} 2x-y-u-v=0 \\ xu+yv-3=0 \end{cases}$ **sistema emanik,**

a) Eztabaidatu ea $P_0\left(x=1, y=0, u=3, v=-1\right)$ **puntuan sistema honek *x* eta *y* aldagaiko *u* eta *v* funtzio inplizituak definitzen dituen, hau da** $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$**.**

b) Aurkitu $u=u(x,y)$ **funtzioaren puntu kritikoak.**

(3 puntu)

a) $\begin{cases} F(x,y,u,v)=2x-y-u-v=0 \\ G(x,y,u,v)=xu+yv-3=0 \end{cases}$ eta $P_0\left(x=1, y=0, u=3, v=-1\right)$ emanik:

I. $\begin{cases} F(P)=2-3+1=0 \\ G(P)=3-3=0 \end{cases}$

II. Deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$\begin{array}{llll} F'_x=2 & F'_y=-1 & F'_u=-1 & F'_v=-1 \\ G'_x=u & G'_y=v & G'_u=x & G'_v=y \end{array}$$

III. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Beraz, $\exists! \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ non *u* eta *v* diferentziagarriak diren eta $u(1,0)=3$ eta $v(1,0)=-1$.

b) $u=u(x,y)$ funtzioaren puntu kritikoak kalkulatu behar ditugu, hau da, $\begin{cases} u'_x=0 \\ u'_y=0 \end{cases}$ sistemaren soluzioak:

Horretarako, $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$ sisteman *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuko dugu.

x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 2-u'_x-v'_x=0 \\ u+x\cdot u'_x+yv'_x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x+v'_x=2 \\ x\cdot u'_x+yv'_x=-u \end{cases} \Rightarrow u'_x\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=\frac{2y+u}{y-x}$$

Eta *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} -1-u'_y-v'_y=0 \\ v+x\cdot u'_y+yv'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y+v'_y=-1 \\ x\cdot u'_y+yv'_y=-v \end{cases} \Rightarrow u'_y\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -v & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=\frac{-y+v}{y-x}$$

Beraz, $\begin{cases} u'_x=0 \\ u'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+u=0 \\ -y+v=0 \end{cases}$ $(x+y\neq 0$ izanik$)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u=-2y \\ v=y \end{cases}$

Erlazio hauek hasierako sisteman ordezkatuz:

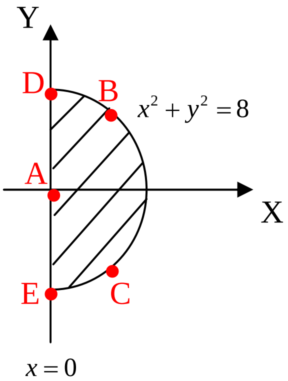
$$\left.\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=2x-y+2y-y=2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=-2xy+y^2-3=0 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow y^2-3=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$u=u(x,y)$ funtzioaren puntu kritikoak $A=(0,\sqrt{3})$ eta $B=(0,-\sqrt{3})$ izango dira.

2.- $z=f(x,y)=x^2+y^2+xy-3$ **funtzioa emanik, kalkulatu mutur absolutuak hurrengo multzoan:**

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 8 \ \wedge \ x\ge 0\right\}$$

(3 puntu)



f funtzio jarraitua da *D* multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan *f*-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) *f*-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x+y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=-2x \\ f'_y=2y+x=0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow\quad -3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$

Puntu kritikoa: $A=(0,0)$ $(A\in D)$.

b) Orain, *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak (*D* multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. *D*-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0,y)=F(y)=y^2-3 \quad\Rightarrow\quad F'(y)=2y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0$

Berriro ere *A* puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+y^2=8 \quad\Rightarrow\quad w(x,y)=x^2+y^2+xy-3+\lambda(x^2+y^2-8)$ funtzioa definituko dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x+y+2\lambda x=0\Leftrightarrow 2x(1+\lambda)+y=0 \\ w'_y=2y+x+2\lambda y=0\Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+x=0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x}{2y} \ \Leftrightarrow\ x^2=y^2 \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2x^2=8 \quad\overset{x\ge 0}{\Rightarrow}\quad x=2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm 2$$

Beraz, bi puntu kritiko gehiago ditugu: $B=(2,2)$ eta $C=(2,-2)$.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2=8 \ \wedge \ x=0$

Hortik $D=\left(0,2\sqrt{2}\right)$ eta $E=\left(0,-2\sqrt{2}\right)$ puntuak ditugu.

Puntu hauetan *f*-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-3 \quad f(B)=9 \quad f(C)=1 \quad f(D)=5 \quad f(E)=5$$

Beraz, *A* minimo eta *B* maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \quad\Rightarrow\quad y=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2\ne 8$

3.- Izan bitez f deribagarria, hertsiki positiboa, eta $F(x)=\int_{x-1}^{3x-3}(x-1)\cdot f(t+1)dt$.
Estudiatu ea *F* funtzioak muturra duen $x=1$ puntuan eta aztertu zein motatakoa den.

(2 puntu)

- Baldintza beharrezkoa: $F'(1)=0$

F integral parametrikoa dela kontuan hartuta:

$$F'(x)=\int_{x-1}^{3x-3} f(t+1)dt+3(x-1)\cdot f(3x-2)-(x-1)\cdot f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F'(1)=\int_{0}^{0} f(t+1)dt+0+0=0$$

Beraz, $x=1$ puntu kritikoa da.

- Baldintza nahikoa (mutur mota sailkatzeko):

$$F''(x)=3f(3x-2)-f(x)+3f(3x-2)+9(x-1)\cdot f'(3x-2)-f(x)-(x-1)\cdot f'(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F''(1)=3f(1)-f(1)+3f(1)-f(1)=4f(1)\underset{\substack{\uparrow \\ f>0}}{>}0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ minimo erlatiboa da.}$$

4.- Kalkulatu $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2}$ integrala, aldez aurreko baldintzaren bat aintzakotzat hartu behar ote den azalduz.

(2 puntu)

$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ non $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$

f mugatua dago $\forall x \in [-2,2] - \{0\}$ eta $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singularra den.

Hau da, I integral inpropioa dela eta, beraz, kalkulatu aurretik bere konbergentzia aztertuko dugu.

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

$I_2 = \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2}$ integral inpropioa konparaziozko irizpidean erabilitako integral eredua da:

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^m} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m < 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \geq 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad I_2 \text{ dibergentea da.}$$

Beraz I dibergentea da $\Rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = \infty$ (funtzio azpiintegrala ez-negatiboa baita).

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

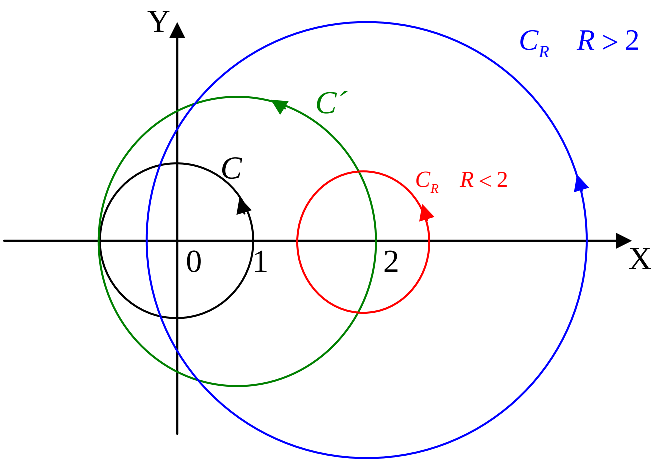
TALDEA:

5.- Izan bedi $\vec{F}(x,y)=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ **funtzioa non** X **eta** Y **eta euren deribatu partzialak jarraituak diren** $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ **eremuan eta** $X'_y=Y'_x$. **Baldin** $\oint_{x^2+y^2=1}\vec{F}d\vec{r}=3$**, kalkulatu arrazoituz:**

a) $\oint_{x^2-2x+y^2=3}\vec{F}d\vec{r}$

b) $\oint_{C_R}\vec{F}d\vec{r}$ **non** $C_R\equiv\begin{cases}x=2+R\cdot\cos t\\ y=R\cdot\sin t\end{cases}\quad \forall R>0,\ R\neq 2$

(3 puntu)



- $C\equiv x^2+y^2=1$
- $\begin{cases}C'\equiv x^2-2xy+y^2=3 \Leftrightarrow\\ C'\equiv(x-1)^2+y^2=4\end{cases}$
- $C_R\equiv(x-2)^2+y^2=R^2$

D eremu bikoizki konexuan definituriko $\vec{F}$ funtzio jarraitua deribatu partzial jarraituekin eta $X'_y=Y'_x$. Teorema 6 dioenez:

$\forall C\subset D$ itxi eta sinple:

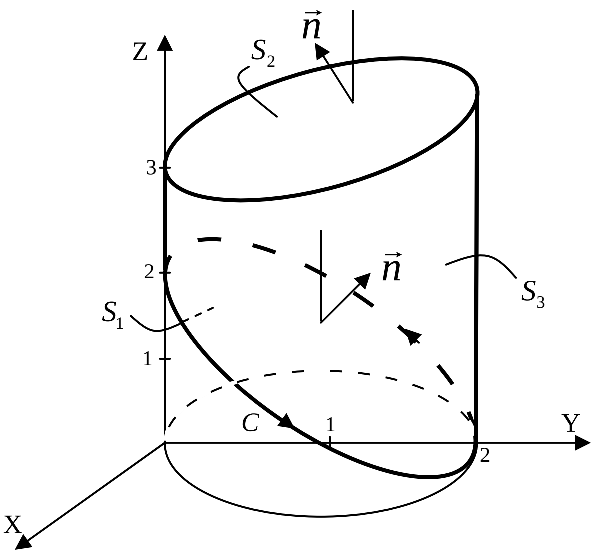
$$\oint_C\vec{F}d\vec{r}=\begin{cases}ktea. & C \text{ puntu singularra inguratzen badu}\\ 0 & \text{kontrako kasuan}\end{cases}$$

Beraz, $\oint_{C'}\vec{F}d\vec{r}=\oint_C\vec{F}d\vec{r}=3$ eta $\oint_{C_R}\vec{F}d\vec{r}=\begin{cases}\oint_C\vec{F}d\vec{r}=3 & \forall R>2\\ 0 & \forall R<2\end{cases}$

6.- $\begin{cases} S_1 \equiv z + y = 2 \\ S_2 \equiv 2z - y = 6 \\ S_3 \equiv x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ **gainazalek *V* solidoa mugatzen duen *S* gainazal itxia osatzen dute.** $\vec{F}(x,y,z) = (x + y^2 + z^2,\ x^2 + z^2,\ x^2 + y^2)$ **funtzio bektoriala emanik, kalkulatu:**

a) $\vec{F}$ **funtzioaren fluxua *V* solidoa mugatzen duen *S* gainazalaren kanpoko aurpegitik.**
b) ***V* solidoa mugatzen duen** S_1 **gainazalaren zatiaren azalera.**
c) $\vec{F}$ **funtzioaren zirkulazioa** S_1 eta S_3 **gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.**
d) $\vec{F}$ **-ren errotazionalaren fluxua *V* solidoa mugatzen duen *S* gainazalaren kanpoko aurpegitik.**
e) $\vec{F}$ **-ren errotazionalaren fluxua** S_3 **gainazalak mugaturiko kanpoko aurpegitik.**

(5 puntu)



a) *S* gainazal itxia denez, Gauss-en teorema aplika daiteke $\vec{F}$ funtzioaren fluxua kalkulatzeko, beraz:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = \iiint_V dxdydz$$

Integral honen mugak zilindrikoetan adieraziko ditugu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 \equiv z = 2 - y = 1 - \rho\cos\theta \\ S_2 \equiv z = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{7 + \rho\sin\theta}{2} \\ S_3 \equiv x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V \equiv \left\{ 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1-\rho\sin\theta \le z \le \frac{7+\rho\sin\theta}{2} \right\}$$

Orduan:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{1-\rho\sin\theta}^{\frac{7+\rho\sin\theta}{2}} \rho dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho \frac{5+3\rho\sin\theta}{2} d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \frac{\sin\theta}{2} \right) d\theta = \left(\frac{5\theta}{4} - \frac{\cos\theta}{2} \right)_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{2}$$

b) $\text{Azalera}\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$

non $S_1 \equiv z = 2-y \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+(y-1)^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad z'_x = 0$ eta $z'_y = -1$,

beraz:

$$\text{Azalera}\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \cdot \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = \pi\sqrt{2}$$

c) $C \equiv S_1 \cap S_3 \equiv \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 1 \\ z = 2-y \end{cases}$ kurba itxi eta sinplea denez, S_1 gainazalaren zatia mugatzen duena, $\vec{F}$ funtzioaren zirkulazioa kalkulatzeko Stokes-en teorema erabil daiteke, beraz:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_{S_1} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} d\vec{S} = \iint_{S_1} \left[(2y-2z)dydz + (2z-2x)dzdx + (2x-2y)dxdy \right]$$

non $S_1 \equiv z = 2-y \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+(y-1)^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0,1,1)$,

beraz:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \pm \iint_{R_{xy}} \left[(2(2-y)-2x) + (2x-2y) \right] dxdy \overset{\left(\gamma<\frac{\pi}{2}\right)}{=} \iint_{R_{xy}} (4-4y)dxdy \overset{(*)}{=}$$

(*) Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 1+\rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \left[0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1 \right]$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-4-4\rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = -4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

d) S gainazal itxia denez, Gauss-en teorema aplika daiteke $\vec{F}$-ren errotazionalaren fluxua kalkulatzeko, beraz:

$$\Phi_S\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} d\vec{S} = \iiint_V \overbrace{div\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)}^{=0} dxdydz = 0$$

e) $\Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=\iint\limits_{S_3}\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}$

Hala ere, gainazal-integral hau kalkulatu beharrean, aurreko ataleko emaitzaz baliatuko gara kalkuluak errazteko. Honela:

$S\equiv S_1\cup S_2\cup S_3$ itxia denez, orduan:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_S\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=\Phi_{S_1}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)+\Phi_{S_2}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)+\Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)\overset{(d)}{=}0\\ \text{Eta } \Phi_{S_1}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=\iint\limits_{S_1}\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}\overset{(c)}{=}0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=-\Phi_{S_2}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=-\iint\limits_{S_2}\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}$$

Gainazal-integral hau hasieran planteatutakoa baino errazagoa da:

$$S_2\equiv z=\frac{y+6}{2}\quad\forall(x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+(y-1)^2\le 1\quad\Rightarrow\quad\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,1)=\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$$

Orduan:

$$\iint\limits_{S_2}\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}=\iint\limits_{S_2}\left[(2y-2z)dydz+(2z-2x)dzdx+(2x-2y)dxdy\right]=$$

$$=\pm\iint\limits_{R_{xy}}\left[-\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{y+6}{2}\right)-2x\right)+(2x-2y)\right]dxdy\overset{\left(\gamma<\frac{\pi}{2}\right)}{=}\iint\limits_{R_{xy}}\left(3x-\frac{5}{2}y-3\right)dxdy\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(3\rho\cos\theta-\frac{5}{2}(1+\rho\sin\theta)-3\right)\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(3\rho^2\cos\theta-\frac{11}{2}\rho-\frac{5}{2}\rho^2\sin\theta\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta-\frac{11}{4}-\frac{5}{6}\sin\theta\right)d\theta=\left(\sin\theta-\frac{11}{4}\theta+\frac{5}{6}\cos\theta\right)_0^{2\pi}=-\frac{11\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right)=\frac{11\pi}{2}$$

(*) Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=1+\rho\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv\left[0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le\rho\le 1\right]$

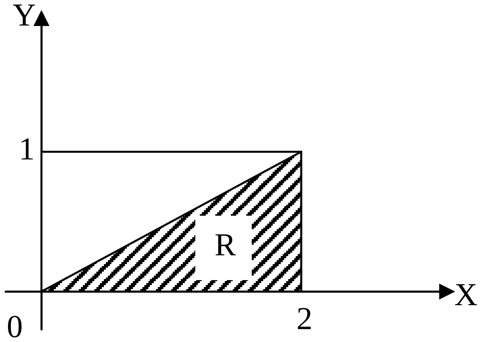
7.- Kalkulatu hurrengo integrala aldez aurretik integrazio ordena aldatuz:

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\,dx\,dy$$

(2 puntu)

$$I = \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\,dx\,dy = \iint_R \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\,dx\,dy$$

non $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 1,\ 2y \le x \le 2\right\}$



Orduan, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \dfrac{x}{2}\right\}$

Beraz:

$$I = \iint_R \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\cdot\frac{x}{2}\,dx = \int_0^2 \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}\,dx =$$

$$= -\left.\frac{\mathrm{L}\left|\cos x\right|}{2}\right|_0^2 = -\frac{\mathrm{L}\left|\cos 2\right|}{2}$$